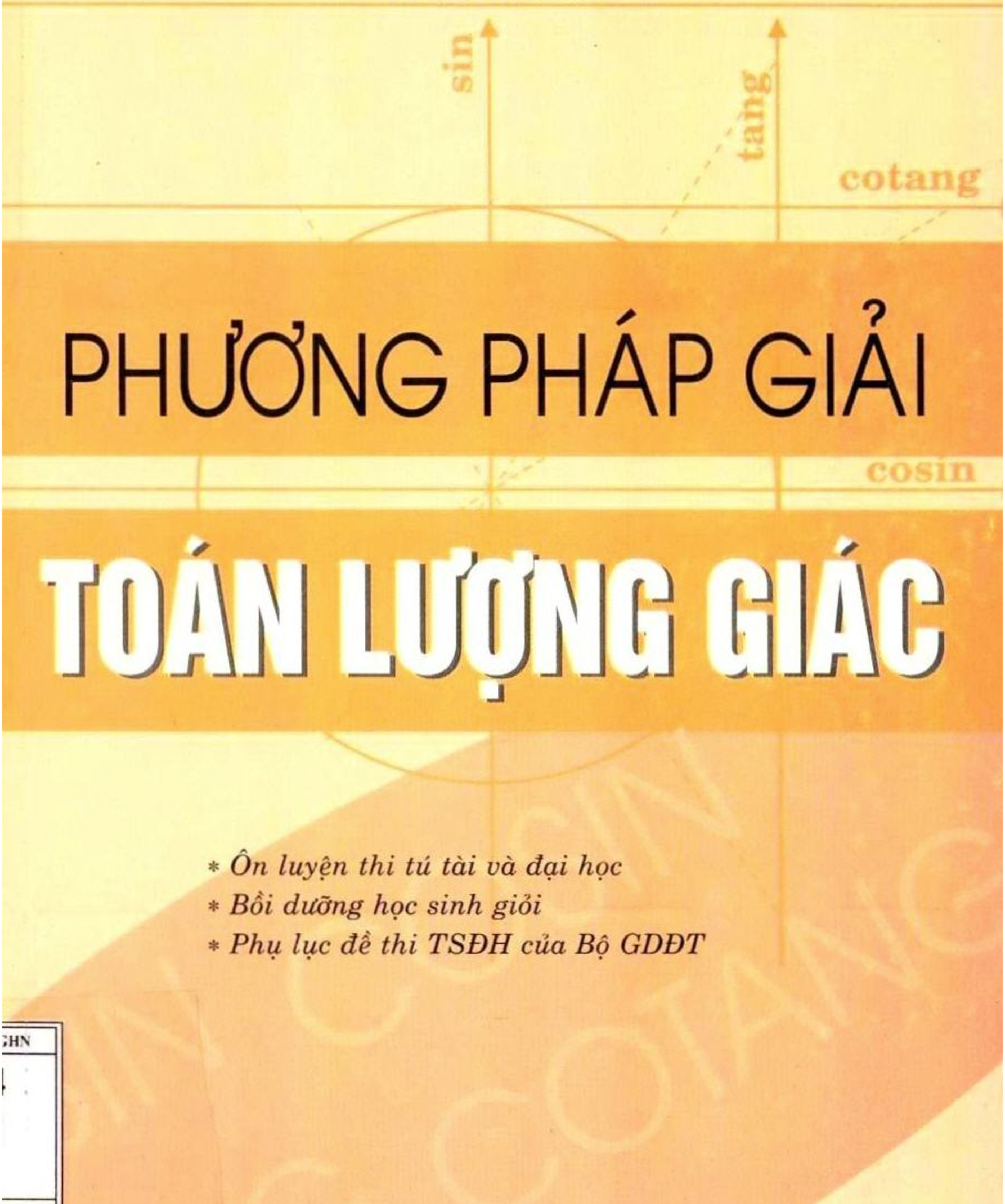
TS. NGUYỄN CAM


sin
tang
cotang
cosin
COSIN
COTANG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI
TOÁN LƯỢNG GIÁC

- *Ôn luyện thi tú tài và đại học*
- *Bồi dưỡng học sinh giỏi*
- *Phụ lục đề thi TSĐH của Bộ GDĐT*

GHN
4
1

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS. NGUYỄN CAM

KHOA TOÁN – ĐHSP HÀ NỘI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN LƯỢNG GIÁC

- **Ôn luyện thi tú tài và đại học**
- **Bồi dưỡng học sinh giỏi**

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chương I

BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

1. Chứng minh đẳng thức lượng giác
2. Biểu thức lượng giác độc lập với biến số
3. Tổng số và tích số lượng giác
4. Hệ thức lượng giác trong tam giác
5. Định dạng tam giác
6. Giải tam giác:

Để giải được các bài toán biến đổi lượng giác, trước tiên phải thuộc và hiểu ý nghĩa các công thức sau:

1. *Hệ thức cơ bản:*

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin^2 x = \dfrac{1}{1 + \text{cotg}^2 x} = \dfrac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$
$\text{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$
$\text{cotg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	

Hệ quả: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$

$\text{tg}x.\text{cotg}x = 1$ (với mọi $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$).

2. *Cung liên kết:*

***a)** Cung đối nhau:*

$\cos(-x) = \cos x$	$\text{tg}(-x) = -\text{tg}x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\text{cotg}(-x) = -\text{cotg}x$

***b)** Cung bù nhau:*

$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\text{tg}(\pi - x) = -\text{tg}x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\text{cotg}(\pi - x) = -\text{cotg}x$

***c)** Cung phụ nhau:*

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotg}x$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\text{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \text{tg}x$

d) Cung hơn kém π:

$\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x$	$\sin(x + \pi) = -\sin x$
$\mathrm{cotg}(x + \pi) = \mathrm{cotg}x$	$\cos(x + \pi) = -\cos x$

- *Hệ quả:* $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x$ (với $n \in \mathbb{Z}$)

  $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x$ (với $n \in \mathbb{Z}$)

e) Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$:

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{cotg}x$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$	$\mathrm{cotg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{tg}x$

3. Công thức cộng:

$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a, \qquad \sin(a - b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \qquad \cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\mathrm{tg}(a + b) = \frac{\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b}{1 - \mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b}, \qquad \mathrm{tg}(a - b) = \frac{\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}b}{1 + \mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b}$$

$$\mathrm{cotg}(a + b) = \frac{\mathrm{cotg}a\,\mathrm{cotg}b - 1}{\mathrm{cotg}a + \mathrm{cotg}b}, \qquad \mathrm{cotg}(a - b) = \frac{-(\mathrm{cotg}a\,\mathrm{cotg}b + 1)}{\mathrm{cotg}a - \mathrm{cotg}b}$$

Hệ quả: $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}x}$; $\quad \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathrm{tg}x - 1}{1 + \mathrm{tg}x}$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

4. Công thức nhân:

- *Cung gấp đôi:*

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\mathrm{tg}2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x} \qquad \left(\text{với } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathrm{cotg}2x = \frac{\mathrm{cotg}^2 x - 1}{2\mathrm{cotg}x} \qquad \left(\text{với } x \neq k\pi,\ x \neq k\frac{\pi}{2}\right)$$

- *Cung gấp ba:*

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

- *Hạ bậc:*

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$
$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

- *Cung chia đôi:* *Với* $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ *thì:*

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \mathrm{tg}x = \frac{2t}{1-t^2}$$

5. *Công thức biến đổi tổng (hiệu) ra tích (thương):*

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}; \qquad \mathrm{tg}a - \mathrm{tg}b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$$
$$\mathrm{cotg}a + \mathrm{cotg}b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b}; \qquad \mathrm{cotg}a - \mathrm{cotg}b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a\sin b}$$

6. *Công thức biến đổi tích ra tổng (hiệu):*

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$
$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

7. Biểu diễn đầu cung trên đường tròn lượng giác:

$$x = a + k\frac{2\pi}{n} \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0)$$

thì x được biểu diễn trên đường tròn lượng giác bởi n đầu cung như sau:

$$x_0 = a,\quad x_1 = a + \frac{2\pi}{n},\quad x_2 = a + \frac{4\pi}{n}, \ldots,\quad x_{n-1} = a + (n-1).\frac{2\pi}{n}$$

8. Hàm số lượng giác của các góc đặc biệt:

Góc	sin	cos	tg	cotg
0 (0°)	0	1	0	||
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	1	0	||	0
$\frac{2\pi}{3}$ (120°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$ (135°)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
π (180°)	0	-1	0	||
$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	-1	0	||	0
2π (360°)	0	1	0	||

§1. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Đề 1.1

Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{2}{\sin x} - \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$

b) $\frac{1}{\cos x} - \text{tg}x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

c) $\text{tg}x.(\text{cotg}^2x - 1) = \text{cotg}x.(1 - \text{tg}^2x)$

d) $(1 - \sin^2x)(1 + 2\text{tg}^2x) = 1 + \sin^2x$.

Giải

a) Ta có: Vế trái (VT) $= \dfrac{2(1+\cos x)-\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \dfrac{2+2\cos x-(1-\cos^2 x)}{\sin x(1+\cos x)}$

$$= \frac{2(1+\cos x)-(1+\cos x)(1-\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$= \frac{2-(1-\cos x)}{\sin x} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \text{Vế phải (VP)}.$$

b) Ta có: $\dfrac{1}{\cos x} - \text{tg}x = \dfrac{\cos x}{1+\sin x} \Leftrightarrow \dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\sin x) = \cos^2 x$

$\Leftrightarrow 1-\sin^2 x = \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$ Điều này đúng.

Vậy đẳng thức đã được chứng minh.

c) Ta có: $\text{tg}x.(\text{cotg}^2 x - 1) = \text{cotg}x.(1-\text{tg}^2 x)$

$\Leftrightarrow \text{tg}x.\text{cotg}^2 x - \text{tg}x = \text{cotg}x - \text{cotg}x.\text{tg}^2 x$

$\Leftrightarrow \text{cotg}x - \text{tg}x = \text{cotg}x - \text{tg}x$ (do $\text{tg}x.\text{cotg}x = 1$).

Đẳng thức này là đúng.

d) Ta có: VT $= (1-\sin^2 x)\left(1+\dfrac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$

$$= (1-\sin^2 x)\left(\frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$$

$= \cos^2 x + 2\sin^2 x$ (vì $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)

$= 1 + \sin^2 x = \text{VP}.$

Đề 1.2

Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $4(\cos^4 x + \sin^4 x) = 3 + \cos 4x$

b) $8(\cos^6 x + \sin^6 x) = 5 + 3\cos 4x$

c) $16\cos^3 x.\sin^2 x = 2\cos x - \cos 3x - \cos 5x.$

Giải

a) Ta có: $4(\cos^4 x + \sin^4 x) = 4[(\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2]$

$= 4[(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x]$

$= 4(1 - 2(\sin x\cos x)^2)$

$= 4\left[1 - 2.\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)^2\right]$ (vì $\sin 2x = 2\sin x\cos x$)

$$= 4\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right]$$

$$= 4\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)\right] \quad \left(\text{do } \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

$$= 4\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right] = 3 + \cos 4x.$$

b) $8(\cos^6 x + \sin^6 x) = 8[(\cos^2 x)^3 + (\sin^2 x)^3]$

$$= 8(\cos^2 x + \sin^2 x)[(\cos^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2 - \sin^2 x\cos^2 x]$$

$$= 8\left[\frac{3+\cos 4x}{4} - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right] \quad (\text{do câu a})$$

$$= 8\left[\frac{3+\cos 4x}{4} - \frac{1}{8}(1-\cos 4x)\right]$$

$$= 8\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x\right) = 5 + 3\cos 4x.$$

c) Ta có: $2\cos x - \cos 3x - \cos 5x = (\cos x - \cos 3x) + (\cos x - \cos 5x)$

$$= -2\sin 2x\sin(-x) - 2\sin 3x\sin(-2x)$$

$$= 2\sin 2x\sin x + 2\sin 2x\sin 3x$$

$$= 2\sin 2x\,(\sin 3x + \sin x)$$

$$= 2\sin 2x.2\sin 2x.\cos x$$

$$= 4(2\sin x.\cos x)^2.\cos x \quad (\text{do } \sin 2x = 2\sin x\cos x)$$

$$= 16\sin^2 x\cos^3 x.$$

Đề 1.3

Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\mathbf{tg\frac{\pi}{6} + tg\frac{2\pi}{9} + tg\frac{5\pi}{18} + tg\frac{\pi}{3} = \frac{8}{\sqrt{3}}\sin\frac{7\pi}{18}}$

b) $\mathbf{tg9^\circ - tg27^\circ - tg63^\circ + tg81^\circ = 4}$

c) $\mathbf{\sin\frac{\pi}{30}.\sin\frac{7\pi}{30}.\sin\frac{13\pi}{30}.\sin\frac{19\pi}{30}.\sin\frac{25\pi}{30} = \frac{1}{32}}$

d) $\mathbf{tg\ 142^\circ 30' = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}}$.

Giải

a) Vế trái $= \left(tg\frac{\pi}{3} + tg\frac{\pi}{6}\right) + \left(tg\frac{5\pi}{18} + tg\frac{2\pi}{9}\right) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{6}} + \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{5\pi}{18}.\cos\frac{2\pi}{9}}$

$$= \frac{2}{\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{6}} + \frac{2}{\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{18}} \quad \left(\text{vì } \sin\frac{\pi}{2} = 1\right)$$

$$VT = 2\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{18}}\right) \qquad (\text{vì } \cos\frac{\pi}{2} = 0)$$

$$= 2.\frac{\cos\frac{\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{18}} = 2.\frac{2\cos\frac{\pi}{18}.\cos\frac{2\pi}{18}}{\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\frac{\pi}{18}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}}.\cos\frac{2\pi}{18} = \frac{8}{\sqrt{3}}\sin\frac{7\pi}{18} \qquad (\text{vì } \frac{2\pi}{18} + \frac{7\pi}{18} = \frac{\pi}{2}).$$

b) Vế trái = $(tg81^\circ + tg9^\circ) - (tg63^\circ + tg27^\circ)$

$$= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 81^\circ.\cos 9^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 63^\circ.\cos 27^\circ}$$

$$= \frac{2}{\cos 90^\circ + \cos 72^\circ} - \frac{2}{\cos 90^\circ + \cos 36^\circ} \qquad (\text{vì } \sin 90^\circ = 1).$$

$$= 2\left(\frac{1}{\cos 72^\circ} - \frac{1}{\cos 36^\circ}\right) \qquad (\text{vì } \cos 90^\circ = 0)$$

$$= 2.\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\cos 72^\circ.\cos 36^\circ} = 2.\frac{-2\sin 54^\circ \sin(-18^\circ)}{\cos 72^\circ.\cos 36^\circ}$$

$$= 4.\frac{\sin 54^\circ.\sin 18^\circ}{\cos 36^\circ.\cos 72^\circ} = 4 \qquad (\text{vì } \sin 54^\circ = \cos 36^\circ \text{ và } \sin 18^\circ = \cos 72^\circ).$$

c) Vế trái = $\left(\sin\frac{19\pi}{30}.\sin\frac{\pi}{30}\right).\left(\sin\frac{13\pi}{30}.\sin\frac{7\pi}{30}\right).\sin\frac{5\pi}{6}$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{3}\right).\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{3}\right).\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos\frac{3\pi}{5} + \frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{5} + \frac{1}{2}\right) \qquad (\text{vì } \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5}\right) + \cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{32} \qquad (\text{vì } \cos\frac{3\pi}{5} = -\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{5} = -\cos\frac{4\pi}{5}).$$

d) Với $t = 142^\circ 30'$ thì $2t = 285^\circ = 360^\circ - 75^\circ$ nên ta có:

$$\mathrm{tg}2t = \mathrm{tg}(-75^\circ) = -\mathrm{tg}(45^\circ + 30^\circ) = -\frac{\mathrm{tg}45^\circ + \mathrm{tg}30^\circ}{1 - \mathrm{tg}45^\circ\mathrm{tg}30^\circ} = -\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}2t = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{2\mathrm{tg}t}{1 - \mathrm{tg}^2 t} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2u(1 - \sqrt{3}) = (1 - u^2)(\sqrt{3} + 1) \quad (\text{với } u = \mathrm{tg}t)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{3} + 1)u^2 + 2(1 - \sqrt{3})u - (\sqrt{3} + 1) = 0$$

$$\Delta' = (1 - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 = 8$$

$$u = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}.$$

Vì $90^\circ < t < 180^\circ$ nên $u = \mathrm{tg}t < 0$, do đó chỉ nhận

$$\mathrm{tg}t = \frac{\sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\left(\sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{3} - 2\sqrt{6} - \sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right) = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}.$$

Đề 1.4

Tính các biểu thức sau:

a) $\mathbf{A = 4\cos 10^\circ . \cos 50^\circ . \cos 70^\circ}$

b) $\mathbf{B = tg20^\circ . tg40^\circ . tg60^\circ . tg80^\circ}$

c) $\mathbf{C = tg10^\circ . tg20^\circ . tg30^\circ . tg40^\circ . tg50^\circ . tg60^\circ . tg70^\circ . tg80^\circ}$

d) $\mathbf{D = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ}$

e) $\mathbf{E = \dfrac{(cotg44^\circ + tg226^\circ)\cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} = cotg72^\circ\, cotg18^\circ}$.

Giải

a) Ta có: $A = (2\cos 70^\circ \cos 50^\circ).2\cos 10^\circ = (\cos 120^\circ + \cos 20^\circ).2\cos 10^\circ$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right).2\cos 10^\circ \qquad (\text{vì } \cos 120^\circ = -\frac{1}{2})$$

$$= \left(2\cos^2 10^\circ - \frac{3}{2}\right).2\cos 10^\circ \qquad (\text{vì } \cos 20^\circ = 2\cos^2 10^\circ - 1)$$

$$= 4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Ta có: $B = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}.\dfrac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}.\sqrt{3}.\dfrac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ}$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}.\frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 40^\circ}.\sqrt{3}.\frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$= 4\sqrt{3}.\frac{\sin 40^\circ.\sin^2 20^\circ}{\sin 10^\circ} = 4\sqrt{3}.\frac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}.\sin 20^\circ.\sin 40^\circ$$

$= 4\sqrt{3}.2\cos 10^\circ.\sin 20^\circ.\sin 40^\circ$ (vì $\sin 20^\circ = 2\sin 10^\circ\cos 10^\circ$)

$$= 4\sqrt{3}.\cos 10^\circ(2\sin 40^\circ\sin 20^\circ)$$

$$= 4\sqrt{3}\cos 10^\circ(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)$$

$= 4\sqrt{3}\cos 10^\circ\left(2\cos^2 10^\circ - \dfrac{3}{2}\right)$ (vì $\cos 20^\circ = 2\cos^2 10^\circ - 1$; $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$)

$$= 2\sqrt{3}(4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ) = 2\sqrt{3}.\cos 30^\circ = 2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

c) Ta có:

$C = (\text{tg}80^\circ.\text{tg}10^\circ).(\text{tg}70^\circ.\text{tg}20^\circ).(\text{tg}60^\circ.\text{tg}30^\circ).(\text{tg}50^\circ.\text{tg}40^\circ)$

$= 1.1.1.1 = 1$

(vì $80^\circ + 10^\circ = 70^\circ + 20^\circ = 60^\circ + 30^\circ = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$).

d) $D = (\cos 160^\circ + \cos 20^\circ) + (\cos 140^\circ + \cos 40^\circ) + (\cos 120^\circ + \cos 60^\circ) +$
$+ (\cos 100^\circ + \cos 80^\circ) + \cos 180^\circ = -1$

(vì $\cos 180^\circ = -1$, $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ$, $\cos 140^\circ = -\cos 40^\circ$,
$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$, $\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$).

e) Ta có: $226^\circ = 180^\circ + 46^\circ$, $406^\circ = 360^\circ + 46^\circ$, $316^\circ = 360^\circ - 44^\circ$

nên $E = \dfrac{(\text{cotg}44^\circ + \text{tg}46^\circ)\cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - 1$ (vì $72^\circ + 18^\circ = 90^\circ$)

$= \dfrac{2\text{tg}46^\circ.\cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - 1$ (vì $\text{cotg}44^\circ = \text{tg}46^\circ$)

$= \dfrac{2\sin 46^\circ}{\cos 44^\circ} - 1 = 2 - 1 = 1$ (vì $\sin 46^\circ = \cos 44^\circ$)

Đề 1.5

a) Cho $\text{tg}x = 4$. Tính $A = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}$ và $B = \dfrac{\sin x + 2\cos x}{\sin x - 2\cos x}$

b) Cho $\text{cotg}x = 3$. Tính $M = \dfrac{\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x}{3\sin^2 x - \sin x\cos x + 2\cos^2 x}$.

Giải

a) Ta có:
$$A = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x}{\cos x}} = \frac{tgx + 1}{1} = tgx + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$B = \frac{\cos x tgx + 2\cos x}{\cos x tgx - 2\cos x} = \frac{\cos x(tgx + 2)}{\cos x(tgx - 2)} = \frac{tgx + 2}{tgx - 2}$$

nên:
$$B = \frac{4 + 2}{4 - 2} = 3.$$

b) Ta có:
$$M = \frac{\sin^2 x\left(1 + 4\dfrac{\cos x}{\sin x} - 3\cot g^2 x\right)}{\sin^2 x\left(3 - \dfrac{\cos x}{\sin x} + 2\cot g^2 x\right)}$$

$$= \frac{1 + 4\cot gx - 3\cot g^2 x}{3 - \cot gx + 2\cot g^2 x} = \frac{1 + 4.3 - 3.3^2}{3 - 3 + 2.3^2} = -\frac{7}{9}.$$

Đề 1.6

Cho $x + y + z = k\pi$ (với k là số nguyên).

Chứng minh rằng: $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 + 2(-1)^k \cos x \cos y \cos z$.

Giải

Ta có: $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} + \dfrac{1 + \cos 2y}{2} + \cos^2 z$

$= 1 + \dfrac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2y) + \cos^2 z$

$= 1 + \cos(x + y)\cos(x - y) + \cos^2 z$

$= 1 + (-1)^k \cos z.\cos(x - y) + \cos^2 z$

(vì $x + y = k\pi - z$ nên $\cos(x + y) = (-1)^k \cos z$)

$= 1 + (-1)^k \cos z\,[\cos(x - y) + (-1)^k \cos z]$ (vì $\cos^2 z = (-1)^{2k}.\cos^2 z$)

$= 1 + (-1)^k \cos z\,[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$

$= 1 + 2(-1)^k \cos z.\cos x.\cos y.$

Đề 1.7

Cho tga, tgb là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 + mx + n = 0 \quad (\text{với } n \neq 1).$$

Tính: $M = \sin^2(a + b) + m\sin(a + b)\cos(a + b) + n\cos^2(a + b)$.

Giải

Vì tga, tgb là nghiệm của $x^2 + mx + n = 0$ nên:

$$tga + tgb = -m \quad \text{và} \quad tgatgb = n.$$

Do đó: $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tgatgb}} = \dfrac{-m}{1-n}$

$$\cos^2(a+b) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(a+b)} = \frac{1}{1+\dfrac{m^2}{(1-n)^2}} = \frac{(1-n)^2}{(1-n)^2+m^2}.$$

Ta có: $M = \cos^2(a+b)\,[\operatorname{tg}^2(a+b) + m\operatorname{tg}(a+b) + n]$

$$= \frac{(1-n)^2}{(1-n)^2+m^2}\left[\frac{m^2}{(1-n)^2} - \frac{m^2}{1-n} + n\right]$$

$$= \frac{(1-n)^2}{(1-n)^2+m^2}\left[\frac{m^2 - m^2(1-n) + n(1-n)^2}{(1-n)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(1-n)^2+m^2}\,n\left[m^2 + (1-n)^2\right] = n.$$

Đề 1.8

Cho b > a > 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}}\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{b-a}{a}}.\sin x}{\sqrt{1+\dfrac{b-a}{a}.\sin^2 x}}.\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sin x}{|\cos x|}.$$

Giải

$$\text{Vế trái} = \frac{\sin x.\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{a+(b-a)\sin^2 x}} = \frac{\sin x.\sqrt{a+b\operatorname{tg}^2 x}}{\sqrt{a(1-\sin^2 x)+b\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\sin x.\sqrt{\dfrac{a\cos^2 x + b\sin^2 x}{\cos^2 x}}}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}} = \frac{\sin x}{|\cos x|}.$$

Đề 1.9

Cho bốn số m, n, θ, φ thỏa: $\begin{cases} m\sin\theta = n\cos\varphi & (1) \\ m^2\cos^2\theta + n^2\sin^2\varphi = 1 & (2) \\ m^2\operatorname{tg}^2\theta + n^2\operatorname{tg}^2\varphi = 1 & (3) \end{cases}$

Chứng minh: $\dfrac{2m^4}{m^2-n^2+1} + \dfrac{2n^4}{m^2+n^2-1} = m^2+n^2+1.$

Giải

Ta có: (2) cho ta: $m^2(1-\sin^2\theta) + n^2(1-\cos^2\varphi) = 1$

$\Leftrightarrow \quad m^2\sin^2\theta + n^2\cos^2\varphi = m^2+n^2-1. \qquad (4)$

Từ (1) suy ra rằng: $m^2\sin^2\theta = n^2\cos^2\varphi$

Do đó (4) trở thành:

$$2n^2\cos^2\varphi = m^2 + n^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\varphi = \frac{m^2 + n^2 - 1}{2n^2}. \qquad (5)$$

Từ (1), ta lại có: $\quad m^2(1 - \cos^2\theta) = n^2\cos^2\varphi$

nên: $\quad m^2\cos^2\theta = m^2 - n^2\cos^2\varphi = m^2 - \frac{1}{2}(m^2 + n^2 - 1) \quad$ (do (5))

hay là: $\quad \cos^2\theta = 1 - \frac{m^2 + n^2 - 1}{2m^2} = \frac{m^2 - n^2 + 1}{2m^2}. \qquad (6)$

Ta có: (3) $\Leftrightarrow m^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) + n^2\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1\right) = 1$

$$\Leftrightarrow m^2\left(\frac{2m^2}{m^2 - n^2 + 1} - 1\right) + n^2\left(\frac{2n^2}{m^2 + n^2 - 1} - 1\right) = 1 \text{ (do (5) và (6))}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^4}{m^2 - n^2 + 1} - m^2 + \frac{2n^4}{m^2 + n^2 - 1} - n^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^4}{m^2 - n^2 + 1} + \frac{2n^4}{m^2 + n^2 - 1} = m^2 + n^2 + 1.$$

Đây là hệ thức mà ta cần chứng minh.

Đề 1.10

Cho ba số a, b, c sao cho:

$$2tg^2a\,tg^2b\,tg^2c + tg^2a\,tg^2b + tg^2b\,tg^2c + tg^2c\,tg^2a = 1 \qquad (1)$$

Chứng minh rằng: $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 1$.

Giải

Đặt $M = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c$ thì ta có:

$$M = \frac{tg^2a}{1 + tg^2a} + \frac{tg^2b}{1 + tg^2b} + \frac{tg^2c}{1 + tg^2c}$$

$$= \frac{tg^2a(1 + tg^2b)(1 + tg^2c) + tg^2b(1 + tg^2a)(1 + tg^2c) + tg^2c(1 + tg^2a)(1 + tg^2b)}{(1 + tg^2a)(1 + tg^2b)(1 + tg^2c)}$$

$$= \frac{tg^2a + tg^2b + tg^2c + 2(tg^2a\,tg^2b + tg^2b\,tg^2c + tg^2c\,tg^2a) + 3tg^2a\,tg^2b\,tg^2c}{1 + tg^2a + tg^2b + tg^2c + tg^2a\,tg^2b + tg^2b\,tg^2c + tg^2c\,tg^2a + tg^2a\,tg^2b\,tg^2c}$$

$$= \frac{tg^2a + tg^2b + tg^2c + 2[1 - 2tg^2a\,tg^2b\,tg^2c] + 3tg^2a\,tg^2b\,tg^2c}{1 + tg^2a + tg^2b + tg^2c + [1 - 2tg^2a\,tg^2b\,tg^2c] + tg^2a\,tg^2b\,tg^2c} \quad \text{(do(1))}$$

$$= \frac{2 + tg^2a + tg^2b + tg^2c - tg^2a\,tg^2b\,tg^2c}{2 + tg^2a + tg^2b + tg^2c - tg^2a\,tg^2b\,tg^2c} = 1.$$

Vậy: $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 1$.

Đề 1.11

Không dùng bảng, hãy tính $\sin 18^\circ$ và $\cos 18^\circ$.

Giải

Đặt $x = 18^\circ$ thì ta có: $5x = 90^\circ$ nên $2x + 3x = 90^\circ$.

Do đó: $\sin 2x = \cos 3x$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x = 4\cos^2 x - 3 \quad (\text{vì } \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x = 4(1 - \sin^2 x) - 3$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Vì $\sin x > 0$ nên $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$.

Ta có: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16}(\sqrt{5} - 1)^2 = \frac{16 - (6 - 2\sqrt{5})}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$.

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \quad (\text{vì } \cos 18^\circ > 0).$$

Vậy: $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$, $\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Đề 1.12

Cho $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a + b \neq 0$ và thỏa: $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ (*)

1. Chứng minh rằng: $\sin^2 x = \frac{a}{a+b}$, $\cos^2 x = \frac{b}{a+b}$

2. Suy ra rằng: $\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$.

Giải

1. Đặt $u = \sin^2 x$, $v = \cos^2 x$ thì: $u + v = 1$ (1)

Từ (*) ta có: $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow bu^2 + av^2 = \frac{ab}{a+b}$ (2)

Từ (1) ta có: $v = 1 - u$, thế vào (2), ta được:

$$bu^2 + a(1 - u)^2 = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow (a + b)^2u^2 - 2a(a + b)u + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ((a + b)u - a)^2 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{a}{a+b}$$

Suy ra: $v = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$. Vậy: $\sin^2 x = \frac{a}{a+b}$, $\cos^2 x = \frac{b}{a+b}$.

2. Từ câu 1, ta suy ra: $\dfrac{\sin^8 x}{a^3} = \dfrac{a}{(a+b)^4}$ và $\dfrac{\cos^8 x}{b^3} = \dfrac{b}{(a+b)^4}$

nên ta có: $\dfrac{\sin^8 x}{a^3} + \dfrac{\cos^8 x}{b^3} = \dfrac{a+b}{(a+b)^4} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$

Vậy: $\dfrac{\sin^8 x}{a^3} + \dfrac{\cos^8 x}{b^3} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$.

Đề 1.13

Cho 4 số a, b, α, β thỏa a ≠ b, a ≠ 1, b ≠ 1 và thỏa:

$$\begin{cases} a\,\mathrm{tg}\alpha = b\,\mathrm{tg}\beta & (1) \\ a\cos^2\beta + b\sin^2\beta = 1 & (2) \\ a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha = 1 & (3) \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $a + b - 2ab = 0$.

Giải

Từ (2) ta có: $a\cos^2\beta + b(1 - \cos^2\beta) = 1 \Leftrightarrow (a-b)\cos^2\beta = 1 - b$

$\Leftrightarrow \cos^2\beta = \dfrac{1-b}{a-b}$ (với a ≠ b)

$\Leftrightarrow \mathrm{tg}^2\beta = \dfrac{1}{\cos^2\beta} - 1 = \dfrac{a-b}{1-b} - 1 = \dfrac{a-1}{1-b}$.

Từ (3) ta có: $a.\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} + b.\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = 1 \Leftrightarrow a\mathrm{tg}^2\alpha + b = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$

$\Leftrightarrow (a-1)\mathrm{tg}^2\alpha = 1 - b \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1-b}{a-1}$.

Từ (1) ta có: $a^2\mathrm{tg}^2\alpha = b^2\mathrm{tg}^2\beta \Rightarrow a^2.\dfrac{1-b}{a-1} = b^2.\dfrac{a-1}{1-b}$

$\Rightarrow a^2(1-b)^2 = b^2(a-1)^2$

$\Rightarrow (a - ab)^2 - (ab - b)^2 = 0$

$\Rightarrow (a-b)(a+b-2ab) = 0$

$\Rightarrow a + b - 2ab = 0$ (vì a ≠ b nên a − b ≠ 0).

Đề 1.14

Cho bốn số A, B, α, β thỏa cosA ≠ 0 và:

$$\begin{cases} \cos A = \cos\alpha\cos B = \cos\beta\cos C & (1) \\ \sin A = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2} & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\mathrm{tg}^2\dfrac{A}{2} = \mathrm{tg}^2\dfrac{B}{2}.\mathrm{tg}^2\dfrac{C}{2}$.

Giải

Từ (1) ta có: $\cos\alpha = \dfrac{\cos A}{\cos B}$ và $\cos\beta = \dfrac{\cos A}{\cos C}$ (*)

(vì $\cos A \neq 0$ nên từ (1) suy ra $\cos B \neq 0$, $\cos C \neq 0$).

Từ (2) ta lại có:

$$\sin^2 A = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} = (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\cos^2 A = \left(1-\frac{\cos A}{\cos B}\right)\left(1-\frac{\cos A}{\cos C}\right) \qquad \text{(vì (*))}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\cos^2 A = 1-\left(\frac{\cos A}{\cos B}+\frac{\cos A}{\cos C}\right)+\frac{\cos^2 A}{\cos B\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 A = \cos A\left(\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\right)-\frac{\cos^2 A}{\cos B\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}-\frac{\cos A}{\cos B\cos C} \qquad \text{(chia 2 vế cho } \cos A \neq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A\left(1+\frac{1}{\cos B\cos C}\right) = \frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{\cos B+\cos C}{\cos B\cos C+1}.$$

Mặt khác, ta lại có:

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{1-\dfrac{\cos B+\cos C}{\cos B\cos C+1}}{1+\dfrac{\cos B+\cos C}{\cos B\cos C+1}}$$

$$= \frac{\cos B\cos C+1-(\cos B+\cos C)}{\cos B\cos C+1+\cos B+\cos C}$$

$$= \frac{(1-\cos B)(1-\cos C)}{(1+\cos B)(1+\cos C)} = \frac{2\sin^2\dfrac{B}{2}.2\sin^2\dfrac{C}{2}}{2\cos^2\dfrac{B}{2}.2\cos^2\dfrac{C}{2}} = \mathrm{tg}^2\frac{B}{2}.\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}.$$

Kết luận: $\mathrm{tg}^2\dfrac{A}{2} = \mathrm{tg}^2\dfrac{B}{2}.\mathrm{tg}^2\dfrac{C}{2}$.

Đề 1.15

Cho bốn số a, b, A, B thỏa sinA ≠ 0 và:
$$\begin{cases} \sin B = \cos a \sin A & (1)\\ \sin C = \cos b \sin A & (2)\\ \sin B \sin C = \cos(a+b) & (3)\end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\mathbf{tg^2 A = tg^2 B + tg^2 C}$.

Giải

Từ (3) ta có: $\sin B\sin C = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$$\Leftrightarrow \quad \sin a\sin b = \cos a\cos b - \sin B\sin C$$

nên $\sin^2 a\,\sin^2 b = (\cos a\cos b - \sin B\sin C)^2$. (4)

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\cos a = \frac{\sin B}{\sin A} \quad \text{và} \quad \cos b = \frac{\sin C}{\sin A}. \qquad (5)$$

Do đó (4) trở thành:

$$(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b) = \left(\frac{\sin B\sin C}{\sin A.\sin A} - \sin B\sin C\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}\right)\left(1-\frac{\sin^2 C}{\sin^2 A}\right) = \sin^2 B\sin^2 C\left(\frac{1}{\sin^2 A}-1\right)^2 \quad (\text{do } (5))$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1-\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 A}\right)}{\sin^2 B}.\frac{\left(1-\dfrac{\sin^2 C}{\sin^2 A}\right)}{\sin^2 C} = \left(\frac{1}{\sin^2 A}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin^2 B}-\frac{1}{\sin^2 A}\right)\left(\frac{1}{\sin^2 C}-\frac{1}{\sin^2 A}\right) = \left(\frac{1}{\sin^2 A}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (\cot g^2 B - \cot g^2 A)(\cot g^2 C - \cot g^2 A) = (\cot g^2 A)^2$$

$$\left(\text{do } \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot g^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cot g^2 B\cot g^2 C - \cot g^2 A(\cot g^2 B + \cot g^2 C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cot g^2 B\ \cot g^2 C = \cot g^2 A\,(\cot g^2 B + \cot g^2 C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cot g^2 A} = \frac{\cot g^2 B + \cot g^2 C}{\cot g^2 B.\cot g^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{\cot g^2 C} + \frac{1}{\cot g^2 B} = \operatorname{tg}^2 C + \operatorname{tg}^2 B.$$

Vậy ta đã chứng minh rằng: $\operatorname{tg}^2 A = \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C$.

Đề 1.16

1. Chứng minh rằng:

$$(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin B + \sin C - \sin A)(\sin A + \sin C - \sin B)(\sin A + \sin B - \sin C)$$
$$- 4\sin^2 A\,\sin^2 B\,\sin^2 C = (2\sin B\sin C\cos A + \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)$$
$$\times (2\sin B\sin C\cos A + \sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C)$$

2. Chứng minh:

$$2\sin B\sin C\cos A + \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = [\cos A + \cos(B - C)][\cos A - \cos(B + C)]$$

3. Suy ra rằng:

$$(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin B + \sin C - \sin A)(\sin A + \sin C - \sin B)(\sin A + \sin B - \sin C)$$
$$= \sin(A + B + C).\sin(B + C - A).\sin(A + C - B).\sin(A + B - C) + 4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C.$$

Giải

1. Ta có:

Đặt $M = (\sin A + \sin B + \sin C)(\sin B + \sin C - \sin A)(\sin A + \sin C - \sin B)$
$\times (\sin A + \sin B - \sin C) - 4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$

thì $M = [(\sin B + \sin C)^2 - \sin^2 A].[\sin^2 A - (\sin C - \sin B)^2] - 4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$
$= (2\sin B\sin C + \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)(2\sin B\sin C + \sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C)$
$- 4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$
$= 4\sin^2 B\sin^2 C - (\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)^2 - 4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$
$= 4\sin^2 B\sin^2 C(1 - \sin^2 A) - (\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)^2$
$= 4\sin^2 B\sin^2 C\cos^2 A - (\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)^2$
$= (2\sin B\sin C\cos A)^2 - (\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)^2$
$= (2\sin B\sin C\cos A + \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)$
$\times (2\sin B\sin C\cos A - \sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 A).$

2. Ta có:

Đặt $P = 2\sin B\sin C\cos A + \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$

thì $P = 2\sin B\sin C\cos A + \sin^2 B + \sin^2 C - 1 + \cos^2 A$
$= \cos^2 A + 2\cos A(\sin B\sin C) + \sin^2 B + \sin^2 C - 1$
$= (\cos A + \sin B\sin C)^2 - \sin^2 B\sin^2 C + \sin^2 B + \sin^2 C - 1$
$= (\cos A + \sin B\sin C)^2 - (1 - \sin^2 B)(1 - \sin^2 C)$
$= (\cos A + \sin B\sin C)^2 - \cos^2 B\cos^2 C$
$= (\cos A + \sin B\sin C + \cos B\cos C)(\cos A + \sin B\sin C - \cos B\cos C)$
$= [\cos A + \cos(B - C)][\cos A - \cos(B + C)].$

3. Đặt $Q = 2\sin B\sin C\cos A - \sin^2 B - \sin^2 C + \sin^2 A$

thì $Q = 2\sin B\sin C\cos A - \sin^2 B - \sin^2 C + 1 - \cos^2 A$
$= -[\cos^2 A - 2\cos A(\sin B\sin C)] + 1 - \sin^2 B - \sin^2 C$
$= -(\cos A - \sin B\sin C)^2 + \sin^2 B\sin^2 C + 1 - \sin^2 B - \sin^2 C$
$= -(\cos A - \sin B\sin C)^2 + (1 - \sin^2 B)(1 - \sin^2 C)$
$= \cos^2 B\cos^2 C - (\cos A - \sin B\sin C)^2$
$= (\cos B\cos C - \sin B\sin C + \cos A).(\cos B\cos C + \sin B\sin C - \cos A)$
$= [\cos(B + C) + \cos A].[\cos(B - C) - \cos A].$

Ta có: $M = P.Q$ nên suy ra:

$$M = [\cos A + \cos(B + C)].[\cos A - \cos(B + C)].[\cos(B - C) + \cos A].$$
$$.[\cos(B - C) - \cos A]$$
$$= [\cos^2 A - \cos^2(B + C)].[\cos^2(B - C) - \cos^2 A].$$

Với $\cos^2 A - \cos^2(B + C) =$

$$= \cos^2 A - \cos^2(B + C)\cos^2 A + \cos^2(B + C)\cos^2 A - \cos^2(B + C)$$
$$= \cos^2 A(1 - \cos^2(B + C) + \cos^2(B + C)(\cos^2 A - 1)$$
$$= \cos^2 A.\sin^2(B + C) - \cos^2(B + C)\sin^2 A$$
$$= [\cos A.\sin(B + C) + \cos(B + C)\sin A].[\cos A\sin(B + C) - \cos(B + C)\sin A]$$
$$= \sin(A + B + C).\sin(B + C - A).$$

Với $\cos^2(B - C) - \cos^2 A = -[\cos^2 A - \cos^2(B - C)]$

$$= -[\cos^2 A - \cos^2 A\cos^2(B - C) + \cos^2 A\cos^2(B - C) - \cos^2(B - C)]$$
$$= -[\cos^2 A(1 - \cos^2(B - C)) - \cos^2(B - C)(1 - \cos^2 A)]$$
$$= -[\cos^2 A\sin^2(B - C) - \cos^2(B - C)\sin^2 A]$$
$$= -[\sin(B - C)\cos A + \sin A\cos(B - C)].[\sin(B - C)\cos A - \sin A\cos(B - C)]$$
$$= -\sin(B - C + A).\sin(B - C - A)$$
$$= \sin(A + B - C).\sin(A + C - B).$$

Do đó: $M = \sin(A + B + C)\sin(B + C - A)\sin(A + B - C)\sin(A + C - B).$

Vậy ta đã chứng minh:

$$(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin B+\sin C-\sin A)(\sin A+\sin C-\sin B)(\sin A+\sin B-\sin C)$$
$$= \sin(A+B+C).\sin(B+C-A).\ \sin(A+C-B).\ \sin(A+B-C)+4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C.$$

Đề 1.17

Cho $\sin x + \cos x = a$.

1. Tính $A = \sin^4 x + \cos^4 x$, $B = \sin^6 x + \cos^6 x$, $C = \sin^8 x + \cos^8 x$.

2. Tính $D = \sin^3 x + \cos^3 x$, $E = \sin^5 x + \cos^5 x$.

Giải

1.• Ta có: $A = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \quad (\text{vì } \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x)$$

mà $a^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = a^2 - 1.$

Vậy $A = 1 - \dfrac{1}{2}(a^2 - 1)^2 = \dfrac{1}{2} + a^2 - \dfrac{1}{2}a^4.$

- Với $B = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x)$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}(a^2 - 1)^2.$$

Vậy: $B = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{4}a^4$.

- Với $C = (\sin^4 x)^2 + (\cos^4 x)^2 = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x$

$$= A^2 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4 = \left(\frac{1 + 2a^2 - a^4}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}(a^2 - 1)^4.$$

2. • Ta có: $D = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x)$

$$= (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = a\left[1 - \frac{1}{2}(a^2 - 1)\right] = a\left(\frac{3 - a^2}{2}\right).$$

Vậy : $D = \frac{1}{2}a(3 - a^2)$

- Ta có: $D = D.(\sin^2 x + \cos^2 x) = (\sin^3 x + \cos^3 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$= \sin^5 x + \cos^5 x + \sin^2 x\cos^2 x(\sin x + \cos x)$$

nên $E = D - \sin^2 x\cos^2 x(\sin x + \cos x)$

$$= D - \frac{1}{4}\sin^2 2x.(\sin x + \cos x) = \frac{a}{2}(3 - a^2) - \frac{1}{4}(a^2 - 1)^2.a.$$

Vậy: $E = \frac{1}{4}a[2(3 - a^2) - (a^2 - 1)^2]$.

§2. BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC ĐỘC LẬP VỚI BIẾN SỐ

Đề 1.18

Cho $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + m(\sin^4 x + \cos^4 x) + 2\sin^2 2x$.

Tìm m để f(x) không phụ thuộc vào biến số x.

Giải

Ta có: $f(x) = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + m[(\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2] + 2\sin^2 2x$

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + m(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x) + 2\sin^2 2x$$

$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x + m\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + 2\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + m\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + 2\sin^2 2x$$

$$= \left(\frac{5}{4} - \frac{m}{2}\right)\sin^2 2x + (m + 1).$$

Do đó để f(x) không phụ thuộc vào biến số x thì phải có:

$$\frac{5}{4} - \frac{m}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{5}{2}.$$

Đề 1.19

Cho $f(x) = \sin(x + a) + \sin(x + 2a) + \sin x$.

Tìm a để f(x) không phụ thuộc vào biến số x.

Giải

Ta có: $f(x) = \sin(x + a) + [\sin(x + 2a) + \sin x]$

$= \sin(x + a) + 2\sin(x + a)\cos a = \sin(x + a)(1 + 2\cos a)$.

Suy ra rằng để hàm số f(x) không phụ thuộc vào biến số x thì phải có:

$$1 + 2\cos a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos a = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

Đề 1.20

Cho $f(x) = \sin(x + 4a) + \sin(x + 3a) + \sin(x + a) + \sin x$.

Tìm a để cho hàm số f(x) không phụ thuộc biến số x.

Giải

Ta có: $f(x) = [\sin(x + 4a) + \sin x] + [\sin(x + 3a) + \sin(x + a)]$

$= 2\sin(x + 2a)\cos 2a + 2\sin(x + 2a)\cos a$

$= 2\sin(x + 2a).[\cos 2a + \cos a]$.

Do đó f(x) không phụ thuộc vào biến số x khi:

$$\cos 2a + \cos a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2a = -\cos a \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2a = \cos(a + \pi)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a = \pm(a + \pi) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \pi + k2\pi \quad \text{hay} \quad a = -\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}.$$

Đề 1.21

Cho $f(x) = a(\sin^6 x + \cos^6 x) + b(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

Tìm hệ thức giữa a và b để f(x) độc lập với biến số x.

Giải

Ta có: $f(x) = a\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) + b\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = a + b - \left(\frac{3a}{4} + \frac{b}{2}\right)\sin^2 2x$.

Do đó để f(x) độc lập đối với biến số x thì phải có:

$$\frac{3a}{4} + \frac{b}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a + 2b = 0.$$

Đề 1.22

Cho hai số a, b thỏa $a - b \neq k\pi$ và $m \neq 1$ sao cho:

$$m\sin(a + b) = \cos(a - b) \qquad (*)$$

Chứng minh: $M = \frac{1}{1 - m\sin 2a} + \frac{1}{1 - m\sin 2b}$ độc lập với a và b.

Giải

Ta có: $2a = (a + b) + (a - b)$,

$2b = (a + b) - (a - b)$ nên ta suy ra:

$$\begin{aligned}1 - m\sin 2a &= 1 - m\sin[(a + b) + (a - b)]\\ &= 1 - m[\sin(a + b)\cos(a - b) + \sin(a - b)\cos(a + b)]\\ &= 1 - m\sin(a + b)\cos(a - b) - m\sin(a - b)\cos(a + b)\\ &= 1 - \cos^2(a - b) - m\sin(a - b)\cos(a + b) \qquad (\text{vì } (*))\\ &= \sin^2(a - b) - m\sin(a - b)\cos(a + b)\\ &= \sin(a - b)[\sin(a - b) - m\cos(a + b)].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 - m\sin 2b &= 1 - m\sin[(a + b) - (a - b)]\\ &= 1 - m[\sin(a + b)\cos(a - b) - \sin(a - b)\cos(a + b)]\\ &= 1 - m\sin(a + b)\cos(a - b) + m\sin(a - b)\cos(a + b)\\ &= 1 - \cos^2(a - b) + m\sin(a - b)\cos(a + b) \qquad (\text{vì } (*))\\ &= \sin^2(a - b) + m\sin(a - b)\cos(a + b)\\ &= \sin(a - b)[\sin(a - b) + m\cos(a + b)].\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{\sin(a-b)[\sin(a-b) - m\cos(a+b)]} + \frac{1}{\sin(a-b)[\sin(a-b) + m\cos(a+b)]}\\ &= \frac{1}{\sin(a-b)}\left[\frac{1}{\sin(a-b) - m\cos(a+b)} + \frac{1}{\sin(a-b) + m\cos(a+b)}\right]\\ &= \frac{1}{\sin(a-b)}\cdot\frac{2\sin(a-b)}{\sin^2(a-b) - m^2\cos^2(a+b)}\\ &= \frac{2}{1 - \cos^2(a-b) - m^2\cos^2(a+b)}\\ &= \frac{2}{1 - m^2\sin^2(a+b) - m^2\cos^2(a+b)} \qquad (\text{vì } (*))\\ &= \frac{2}{1 - m^2}.\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng M độc lập với a và b.

Đề 1.23

Chứng minh các hàm số sau đây độc lập với biến số x:

1. $y = \sin^8x + \cos^8x - 2(\sin^4x + \cos^4x + \sin^2x\cos^2x)^2$
2. $y = 3(\sin^8x - \cos^8x) + 4(\cos^6x - 2\sin^6x) + 6\sin^4x$
3. $y = \cos^2x + \cos^2(x + a) - 2\cos a\cos x\cos(x + a)$.

Giải

1. Ta có:

$$\begin{aligned}
y &= (\sin^4x)^2 + (\cos^4x)^2 - 2[(\sin^2x)^2 + (\cos^2x)^2 + \sin^2x\cos^2x]^2\\
&= (\sin^4x + \cos^4x)^2 - 2\sin^4x\cos^4x - 2[1 - \sin^2x\cos^2x]^2\\
&= (1 - 2\sin^2x\cos^2x)^2 - 2\sin^4x\cos^4x - 2(1 - 2\sin^2x\cos^2x + \sin^4x\cos^4x)\\
&= 1 - 4\sin^2x\cos^2x + 4\sin^4x\cos^4x - 2\sin^4x\cos^4x - 2 + 4\sin^2x\cos^2x -\\
&\qquad - 2\sin^4x\cos^4x\\
&= -1 \quad \text{(độc lập với x).}
\end{aligned}$$

2. $y = 3(\sin^4x + \cos^4x)(\sin^2x - \cos^2x) + 4\cos^6x - 8\sin^6x + 6\sin^4x$

Đặt $t = \sin^2x$ thì $\cos^2x = 1 - t$ nên ta có:

$$\begin{aligned}
y &= 3[t^2 + (1 - t)^2][t - (1 - t)] + 4(1 - t)^3 - 8t^3 + 6t^2\\
&= 3(2t^2 - 2t + 1)(2t - 1) + 4(1 - 3t + 3t^2 - t^3) - 8t^3 + 6t^2\\
&= 12t^3 - 18t^2 + 12t - 3 + 4 - 12t + 12t^2 - 4t^3 - 8t^3 + 6t^2\\
&= 1.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
y &= \cos^2x + (\cos x\cos a - \sin x\sin a)^2 - 2\cos a\cos x(\cos x\cos a - \sin x\sin a)\\
&= \cos^2x + \cos^2x\cos^2a + \sin^2x\sin^2a - 2\sin a\cos a\sin x\cos x -\\
&\qquad - 2\cos^2a\cos^2x + 2\sin a\cos a\sin x\cos x\\
&= \cos^2x + \sin^2x\sin^2a - \cos^2a\cos^2x\\
&= \cos^2x(1 - \cos^2a) + \sin^2x\sin^2a\\
&= \cos^2x\sin^2a + \sin^2x\sin^2a = \sin^2a(\cos^2x + \sin^2x)\\
&= \sin^2a.
\end{aligned}$$

Vậy y độc lập với x.

Đề 1.24

Cho $f(x) = m(\sin^8x + \cos^8x) + (2m - 1)(\cos^4x - \sin^4x) + \cos 2x$.

Tìm m để f(x) độc lập với biến số x.

Giải

Ta có: $\cos^4x - \sin^4x = (\cos^2x - \sin^2x)(\cos^2x + \sin^2x)$

$$= \cos^2x - \sin^2x = \cos 2x$$

nên:

$$\begin{aligned}
y &= m(\sin^8x + \cos^8x) + (2m - 1)\cos 2x + \cos 2x\\
&= m(\sin^8x + \cos^8x) + 2m\cos 2x\\
&= m[\sin^8x + \cos^8x + 2\cos 2x].
\end{aligned}$$

Do đó khi m = 0 thì y độc lập với biến số x.

§3. TỔNG VÀ TÍCH SỐ LƯỢNG GIÁC

- Xét tổng số $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (với n > 1 là số tự nhiên)

  Giả sử có hàm số f(x) thỏa:

  $$a_i = f(i) - f(i-1), \quad \forall i = 1, \ldots, n \text{ thì}$$

  $$S_n = (f(1) - f(0) + (f(2) - f(1)) + (f(3) - f(2)) + \ldots + f(n) - f(n-1)$$

  Do đó $S_n = f(n) - f(0)$

- Xét tích số $P_n = a_1.a_2\ldots a_n$

  Giả sử có hàm số f(x) thỏa:

  $$a_i = \frac{f(i+1)}{f(i)} \quad \text{với } i = 1, \ldots, n \text{ thì:}$$

  $$S_n = \frac{f(2)}{f(1)} \cdot \frac{f(3)}{f(2)} \cdot \frac{f(4)}{f(3)} \ldots \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(n+1)}{f(1)}.$$

Đề 1.25

1. Chứng minh: tgx = cotgx − 2cotg2x

2. Suy ra: $\frac{1}{2}\text{tg}\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\text{tg}\frac{a}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\text{cotg}\frac{a}{2^n} - \text{cotg}a$.

Giải

1. Ta có: $\text{cotg}2x = \frac{1}{\text{tg}2x} = \frac{1-\text{tg}^2x}{2\text{tg}x} = \frac{1}{2\text{tg}x} - \frac{1}{2}\text{tg}x$

$$\Rightarrow \quad 2\text{cotg}2x = \text{cotg}x - \text{tg}x \quad \Rightarrow \quad \text{tg}x = \text{cotg}x - 2\text{cotg}2x.$$

2. Từ câu 1, ta suy ra rằng:

$$\text{tg}\frac{a}{2} = \text{cotg}\frac{a}{2} - 2\text{cotg}a \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\text{tg}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\text{cotg}\frac{a}{2} - \text{cotg}a$$

$$\text{tg}\frac{a}{2^2} = \text{cotg}\frac{a}{2^2} - 2\text{cotg}\frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^2}\text{tg}\frac{a}{2^2} = \frac{1}{2^2}\text{cotg}\frac{a}{2^2} - \frac{1}{2}\text{cotg}\frac{a}{2}$$

$$\text{tg}\frac{a}{2^3} = \text{cotg}\frac{a}{2^3} - 2\text{cotg}\frac{a}{2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^3}\text{tg}\frac{a}{2^3} = \frac{1}{2^3}\text{cotg}\frac{a}{2^3} - \frac{1}{2^2}\text{cotg}\frac{a}{2^2}$$

. . . .

$$\text{tg}\frac{a}{2^n} = \text{cotg}\frac{a}{2^n} - 2\text{cotg}\frac{a}{2^{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\text{cotg}\frac{a}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\text{cotg}\frac{a}{2^{n-1}}.$$

Cộng vế và đơn giản các đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{2}\text{tg}\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\text{tg}\frac{a}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\text{cotg}\frac{a}{2^n} - \text{cotg}a.$$

Đề 1.26

Cho x thỏa $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. Tính $S_n = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$

Suy ra giá trị của $M = \cos\frac{2\pi}{21} + \cos\frac{4\pi}{21} + \cos\frac{6\pi}{21} + \ldots + \cos\frac{20\pi}{21}$.

Giải

Ta có: $$\sin\frac{x}{2}\cos x = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right]$$

$$\sin\frac{x}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right]$$

$$\sin\frac{x}{2}\cos 3x = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{7x}{2} - \sin\frac{5x}{2}\right]$$

. . . .

$$\sin\frac{x}{2}\cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right].$$

Cộng vế các đẳng thức trên ta có:

$$\sin\frac{x}{2}(\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right].$$

Suy ra: $$S_n = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Đặt $x = \frac{2\pi}{21}$ thì $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos 10x$.

Áp dụng kết quả trên, ta có: $M = \dfrac{\sin\pi - \sin\frac{\pi}{21}}{2\sin\frac{\pi}{21}} = -\dfrac{1}{2}$ (vì $\sin\pi = 0$).

Đề 1.27

1. Tính $S_n = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n + 1)x$

2. Áp dụng để tính $M = \cos\frac{\pi}{19} + \cos\frac{3\pi}{19} + \cos\frac{5\pi}{19} + \ldots + \cos\frac{17\pi}{19}$.

Giải

1. Ta có: $2\sin x\cos x = \sin 2x$

$2\sin x\cos 3x = \sin 4x - \sin 2x$

$2\sin x\cos 5x = \sin 6x - \sin 4x$

. . . .

$$2\sin x\cos(2n+1)x = \sin(2n+2)x - \sin(2n)x.$$

Cộng vế các đẳng thức trên ta được:

$$2\sin x.S_n = \sin(2n+2)x \quad \text{hay} \quad S_n = \frac{\sin(2n+2)x}{2\sin x} \quad (\text{với } \sin x \neq 0)$$

2. Đặt $x = \frac{\pi}{19}$ thì: $M = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos 17x.$

Áp dụng kết quả câu 1 với n = 8, ta có:

$$M = \frac{\sin 18x}{2\sin x} = \frac{\sin\frac{18\pi}{19}}{2\sin\frac{\pi}{19}} = \frac{1}{2}.$$

Đề 1.28

Tính tổng số: $S_n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$.

Giải

Ta có:

$$2\sin\frac{x}{2}\sin x = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\sin 2x = \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\sin 3x = \cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2}$$

. . . .

$$2\sin\frac{x}{2}\sin nx = \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Cộng vế và đơn giản các đẳng thức trên, ta có:

$$2\sin\frac{x}{2}.S_n = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Vậy:

$$S_n = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Đề 1.29

1. Chứng minh: $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 x}$ (*)

2. Suy ra cách tính: $S = \frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}} + \frac{1}{4^2\cos^2\frac{a}{2^2}} + \ldots + \frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}.$

Giải

1. Ta có: (*) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{4}{\sin^2 2x} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}=\dfrac{4}{\sin^2 2x}$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x$

Đẳng thức này đúng vì $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

2. Từ kết quả câu 1, ta suy ra:

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}}=\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{4\sin^2\frac{a}{2}}$$

$$\frac{1}{4^2\cos^2\frac{a}{2^2}}=\frac{1}{4\sin^2\frac{a}{2}}-\frac{1}{4^2\sin^2\frac{a}{2^2}}$$

$$\frac{1}{4^3\cos^2\frac{a}{2^3}}=\frac{1}{4^2\sin^2\frac{a}{2^2}}-\frac{1}{4^3\sin^2\frac{a}{2^3}}$$

. . . .

$$\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}=\frac{1}{4^{n-1}\sin^2\frac{a}{2^{n-1}}}-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}.$$

Cộng vế và đơn giản các đẳng thức trên, ta được: $S=\dfrac{1}{\sin^2 a}-\dfrac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}$.

Đề 1.30

Cho $S_n=\sin^3\frac{a}{3}+3\sin^3\frac{a}{3^2}+\ldots+3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$.

Chứng minh rằng: $S_n=\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{a}{3^n}-\sin a\right)$.

Giải

Ta có: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \Leftrightarrow \quad \sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$

Từ đó, suy ra rằng: $\sin^3\frac{a}{3}=\frac{1}{4}\left(3\sin\frac{a}{3}-\sin a\right)$

$$3\sin^3\frac{a}{3^2}=\frac{1}{4}\left(3^2\sin\frac{a}{3^2}-3\sin\frac{a}{3}\right)$$

$$3^2\sin^3\frac{a}{3^3}=\frac{1}{4}\left(3^3\sin\frac{a}{3^3}-3^2\sin\frac{a}{3^2}\right)$$

. . . .

$$3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}=\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{a}{3^n}-3^{n-1}\sin\frac{a}{3^{n-1}}\right).$$

Cộng vế và đơn giản các đẳng thức trên, ta được: $S_n=\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{a}{3^n}-\sin a\right)$.

Đề 1.31

1. Chứng minh: lg cosx = lgsin2x – lgsinx – lg2 (*)

2. Suy ra rằng: $\lg\cos\frac{x}{2}+\lg\cos\frac{x}{2^2}+\ldots+\lg\frac{x}{2^n}=\lg\left(\frac{\sin x}{2^n.\sin\frac{x}{2^n}}\right)$.

Giải

1. Ta có: (*) $\Leftrightarrow$ $\lg\cos x=\lg\frac{\sin 2x}{2\sin x}$ $\Leftrightarrow$ $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$

$\Leftrightarrow$ $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

Vậy (*) đã được chứng minh.

2. Từ câu 1, ta suy ra:

$$\lg\cos\frac{x}{2}=\lg\sin x-\lg\sin\frac{x}{2}-\lg 2$$

$$\lg\cos\frac{x}{2^2}=\lg\sin\frac{x}{2}-\lg\sin\frac{x}{2^2}-\lg 2$$

$$\lg\cos\frac{x}{2^3}=\lg\sin\frac{x}{2^2}-\lg\sin\frac{x}{2^3}-\lg 2$$

. . . .

$$\lg\cos\frac{x}{2^n}=\lg\sin\frac{x}{2^{n-1}}-\lg\sin\frac{x}{2^n}-\lg 2.$$

Cộng vế và đơn giản các đẳng thức trên, ta được:

$$\lg\cos\frac{x}{2}+\ldots+\lg\cos\frac{x}{2^n}=\lg\sin x-\lg\sin\frac{x}{2^n}-n\lg 2=\lg\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Đề 1.32

Cho $\sin\frac{a}{2}\neq 0$.

1. Tính S = sinx + sin(x + a) + sin(x + 2a) + ... + sin(x + na)

2. Tính M = cosx + cos(x + a) + cos(x + 2a) + ... + cos(x + na)

(với n là số nguyên dương).

Giải

1. Ta có: $2\sin x.\sin\frac{a}{2} = \cos\left(x - \frac{a}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{a}{2}\right)$

$$2\sin(x + a).\sin\frac{a}{2} = \cos\left(x + \frac{a}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{3a}{2}\right)$$

$$2\sin(x + 2a).\sin\frac{a}{2} = \cos\left(x + \frac{3a}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{5a}{2}\right)$$

. . . .

$$2\sin(x + na).\sin\frac{a}{2} = \cos\left(x + \left(n - \frac{1}{2}\right)a\right) - \cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)a\right).$$

Cộng vế các đẳng thức trên, ta có:

$$2S.\sin\frac{a}{2} = \cos\left(x - \frac{a}{2}\right) - \cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)a\right)$$

nên: $S = \dfrac{\cos\left(x - \frac{a}{2}\right) - \cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)a\right)}{2\sin\frac{a}{2}} = \dfrac{\sin\left(x + \frac{na}{2}\right).\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$

2. Ta có: $2\cos x.\sin\frac{a}{2} = \sin\left(x + \frac{a}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{a}{2}\right)$

$$2\cos(x + a).\sin\frac{a}{2} = \sin\left(x + \frac{3a}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{a}{2}\right)$$

$$2\cos(x + 2a).\sin\frac{a}{2} = \sin\left(x + \frac{5a}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{3a}{2}\right)$$

. . . .

$$2\cos(x + na).\sin\frac{a}{2} = \sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)a\right) - \sin\left(x + \left(n - \frac{1}{2}\right)a\right).$$

Cộng vế, ta được:

$$2M.\sin\frac{a}{2} = \sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)a\right) - \sin\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Do đó: $M = \dfrac{\sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)a\right) - \sin\left(x - \frac{a}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} = \dfrac{\cos\left(x + \frac{na}{2}\right).\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$

Đề 1.33

1. Rút gọn: $S_n = \frac{1}{\cos x.\cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x.\cos 3x} + \ldots + \frac{1}{\cos nx.\cos(n+1)x}$

2. Cho $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là cấp số cộng với công sai là $r \neq k\pi$.

Hãy rút gọn: $M = \frac{1}{\cos a_1 \cos a_2} + \frac{1}{\cos a_2 \cos a_3} + \ldots + \frac{1}{\cos a_{n-1} \cos a_n}$.

Giải

1. Ta có: $\quad tga - tgb = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos a \cos b} = \frac{tga - tgb}{\sin(a-b)}$.

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{\cos x \cos 2x} = \frac{tg2x - tgx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\cos 2x \cos 3x} = \frac{tg3x - tg2x}{\sin x}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\cos nx \cos(n+1)x} = \frac{tg(n+1)x - tgnx}{\sin x}.$$

Cộng vế ta được: $\quad S_n = \frac{tg(n+1)x - tgx}{\sin x}$.

2. Từ $\frac{1}{\cos a \cos b} = \frac{tga - tgb}{\sin(a-b)}$, ta có:

$$\frac{1}{\cos a_1 \cos a_2} = \frac{tga_2 - tga_1}{\sin(a_2 - a_1)} = \frac{tga_2 - tga_1}{\sin r}$$

$$\frac{1}{\cos a_2 \cos a_3} = \frac{tga_3 - tga_2}{\sin(a_3 - a_2)} = \frac{tga_3 - tga_2}{\sin r}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\cos a_{n-1} \cos a_n} = \frac{tga_n - tga_{n-1}}{\sin(a_n - a_{n-1})} = \frac{tga_n - tga_{n-1}}{\sin r}.$$

Cộng vế, ta được: $\quad M = \frac{tga_n - tga_1}{\sin r}$.

Đề 1.34

Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 x} + \frac{1}{\sin 2^3 x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \mathrm{cotg}x - \mathrm{cotg}2^n x.$$

Giải

Ta có: $\quad \mathrm{cotg}a - \mathrm{cotg}2a = \frac{\sin(2a-a)}{\sin a \sin 2a} = \frac{\sin a}{\sin a \sin 2a} = \frac{1}{\sin 2a}$

Từ đó, ta suy ra:
$$\frac{1}{\sin 2x} = \text{cotg}x - \text{cotg}2x$$
$$\frac{1}{\sin 4x} = \text{cotg}2x - \text{cotg}4x$$

……

$$\frac{1}{\sin 2^{n}x} = \text{cotg}2^{n-1}x - \text{cotg}2^{n}x\ .$$

Cộng vế các đẳng thức trên, ta được:
$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^{n}x} = \text{cotg}x - \text{cotg}2^{n}x\ .$$

Đề 1.35

Chứng minh rằng: $\cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x.\cos 16x.\cos 32x = \dfrac{\sin 64x}{64\sin x}$.

Giải

$$\text{Vế trái} = \frac{\sin 2x}{2\sin x}.\frac{\sin 4x}{2\sin 2x}.\frac{\sin 8x}{2\sin 4x}.\frac{\sin 16x}{2\sin 8x}.\frac{\sin 32x}{2\sin 16x}.\frac{\sin 64x}{2\sin 32x}$$
$$= \frac{\sin 64x}{2^{6}\sin x} = \frac{\sin 64x}{64\sin x}.$$

Đề 1.36

1. Chứng minh: $2\cos x - 1 = \dfrac{2\cos 2x + 1}{2\cos x + 1}$ (*)

2. Chứng minh rằng:
$$(2\cos a - 1)(2\cos 2a - 1)(2\cos 2^{2}a - 1)\ldots(2\cos 2^{n}a - 1) = \frac{2\cos 2^{n+1}a + 1}{2\cos a + 1}.$$

Giải

1. Ta có: (*) $\Leftrightarrow$ $(2\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 2\cos 2x + 1$

$\Leftrightarrow$ $4\cos^{2}x - 1 = 2\cos 2x + 1$

$\Leftrightarrow$ $4\cos^{2}x - 1 = 2(2\cos^{2}x - 1) + 1$

$\Leftrightarrow$ $4\cos^{2}x - 1 = 4\cos^{2}x - 1.$

Vậy (*) đã được chứng minh.

2. Áp dụng (*) ta có: $2\cos a - 1 = \dfrac{2\cos 2a + 1}{2\cos a + 1}$
$$2\cos 2a - 1 = \frac{2\cos 2^{2}a + 1}{2\cos 2a + 1}$$
$$2\cos 2^{2}a - 1 = \frac{2\cos 2^{3}a + 1}{2\cos 2^{2}a + 1}$$

……

……

$$2\cos 2^n a - 1 = \frac{2\cos 2^{n+1}a + 1}{2\cos 2^n a + 1}.$$

Nhân vế và đơn giản ta được:

$$(2\cos a - 1)(2\cos 2a - 1)\ldots(2\cos 2^n a - 1) = \frac{2\cos 2^{n+1}a + 1}{2\cos a + 1}.$$

Đề 1.37

1. Chứng minh rằng: $1 + \dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{\text{tg}2x}{\text{tg}x}$ (*)

2. Suy ra rằng:

$$\left(1 + \frac{1}{\cos a}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos 2a}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos 2^2 a}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{\cos 2^n a}\right) = \frac{\text{tg}2^n a}{\text{tg}\frac{a}{2}}.$$

Giải

1. Ta có: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x + 1}{\cos 2x} = \dfrac{\text{tg}2x}{\text{tg}x} \Leftrightarrow \dfrac{2\cos^2 x}{\cos 2x} = \dfrac{\text{tg}2x}{\text{tg}x}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\,\text{tg}x = \sin 2x \Leftrightarrow 2\cos x\,(\cos x\,\text{tg}x) = \sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos x.\sin x = \sin 2x.$

Vậy (*) đã được chứng minh.

2. Từ câu 1, ta suy ra: $1 + \dfrac{1}{\cos a} = \dfrac{\text{tg}a}{\text{tg}\frac{a}{2}}$

$$1 + \frac{1}{\cos 2a} = \frac{\text{tg}2a}{\text{tg}a}$$

. . . .

$$1 + \frac{1}{\cos 2^n a} = \frac{\text{tg}2^n a}{\text{tg}2^{n-1}a}.$$

Nhân vế các đẳng thức trên, ta được:

$$\left(1 + \frac{1}{\cos a}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos 2a}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{\cos 2^n a}\right) = \frac{\text{tg}a}{\text{tg}\frac{a}{2}}.\frac{\text{tg}2a}{\text{tg}a}.\frac{\text{tg}2^2 a}{\text{tg}2a}\ldots\frac{\text{tg}2^n a}{\text{tg}2^{n-1}a} = \frac{\text{tg}2^n a}{\text{tg}\frac{a}{2}}.$$

Đề 1.38

1. Chứng minh: $\cos a + \cos b = \dfrac{\cos 2a - \cos 2b}{2(\cos a - \cos b)}$ (*)

2. Chứng minh:

$$\left(\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2^2}+\cos\frac{y}{2^2}\right)\left(\cos\frac{x}{2^3}+\cos\frac{y}{2^3}\right)\ldots\left(\cos\frac{x}{2^n}+\cos\frac{y}{2^n}\right)=$$

$$=\frac{\cos x-\cos y}{2^n\left(\cos\frac{x}{2^n}-\cos\frac{y}{2^n}\right)}.$$

Giải

1. Ta có: (*) $\Leftrightarrow\ 2(\cos^2 a-\cos^2 b)=\cos 2a-\cos 2b$

$\Leftrightarrow\ 2(\cos^2 a-\cos^2 b)=2\cos^2 a-1-(2\cos^2 b-1)$

$\Leftrightarrow\ 2(\cos^2 a-\cos^2 b)=2(\cos^2 a-\cos^2 b).$

Vậy (*) đã được chứng minh.

2. Từ kết quả câu 1, ta suy ra:

$$\text{Vế trái}=\frac{\cos x-\cos y}{2\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{y}{2}\right)}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{y}{2}}{2\left(\cos\frac{x}{2^2}-\cos\frac{y}{2^2}\right)}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2^2}-\cos\frac{y}{2^2}}{2\left(\cos\frac{x}{2^3}-\cos\frac{y}{2^3}\right)}\ldots$$

$$\ldots\frac{\cos\frac{x}{2^{n-1}}-\cos\frac{y}{2^{n-1}}}{2\left(\cos\frac{x}{2^n}-\cos\frac{y}{2^n}\right)}=\frac{\cos x-\cos y}{2^n\left(\cos\frac{x}{2^n}-\cos\frac{y}{2^n}\right)}.$$

Vậy:

$$\left(\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2^2}+\cos\frac{y}{2^2}\right)\ldots\left(\cos\frac{x}{2^n}+\cos\frac{y}{2^n}\right)=\frac{\cos x-\cos y}{2^n\left(\cos\frac{x}{2^n}-\cos\frac{y}{2^n}\right)}.$$

Đề 1.39

Chứng minh rằng:

$$\cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{3\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{5\pi}{15}.\cos\frac{6\pi}{15}.\cos\frac{7\pi}{15}=2^{-7}.$$

Giải

Ta có: Đặt $P=\cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{3\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{5\pi}{15}.\cos\frac{6\pi}{15}.\cos\frac{7\pi}{15}$

thì $$P=\frac{\sin\frac{2\pi}{15}}{2\sin\frac{\pi}{15}}.\frac{\sin\frac{4\pi}{15}}{2\sin\frac{2\pi}{15}}.\frac{\sin\frac{6\pi}{15}}{2\sin\frac{3\pi}{15}}.\frac{\sin\frac{8\pi}{15}}{2\sin\frac{4\pi}{15}}.\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{12\pi}{15}}{2\sin\frac{6\pi}{15}}.\frac{\sin\frac{14\pi}{15}}{2\sin\frac{7\pi}{15}}=2^{-7}.$$

Vì $\sin\frac{\pi}{15}=\sin\frac{14\pi}{15}$, $\quad\sin\frac{3\pi}{15}=\sin\frac{12\pi}{15}$, $\quad\sin\frac{7\pi}{15}=\sin\frac{8\pi}{15}$.

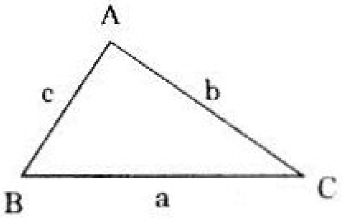
§4. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Để giải bài toán về hệ thức lượng trong tam giác cũng như bài toán định dạng, cần biết các kết quả sau đây:

- *Hệ thức COSIN:*

Tam giác ABC với BC = a, AC = b, AB = c thì:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



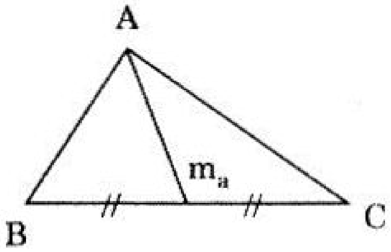
- *Hệ thức SIN:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác).

- *Hệ thức trung tuyến:*

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$
$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$$
$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

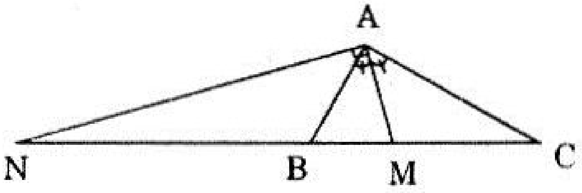


(trong đó m_a, m_b, m_c lần lượt là trung tuyến kẻ từ A, B, C).

- *Hệ thức đường phân giác:*

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}$$

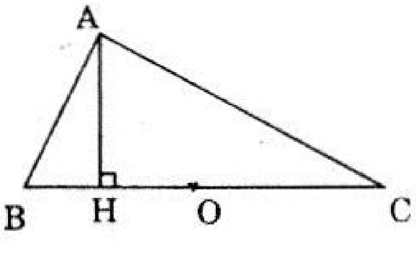
(trong đó AM, AN là các phân giác trong và ngoài của góc A).



- *Hệ thức đường cao:*

$$AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC}.\overline{OH}$$

(trong đó AH là đường cao, còn O là trung điểm của BC).



- *Diện tích tam giác:*

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$S = pr$$

(với $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$; r là bán kính đường tròn nội tiếp trong tam giác)

$S = \dfrac{abc}{4R}$ (với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác)

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (với $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$)

$S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

(với r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính của đường tròn bàng tiếp trong các góc của tam giác)

$$r_a = p\,tg\frac{A}{2}, \quad r_b = p\,tg\frac{B}{2}, \quad r_c = p\,tg\frac{C}{2}.$$

Đề 1.40

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $tgA + tgB + tgC = tgA\,tgB\,tgC$

b) $cotg\dfrac{A}{2} + cotg\dfrac{B}{2} + cotg\dfrac{C}{2} = cotg\dfrac{A}{2}cotg\dfrac{B}{2}cotg\dfrac{C}{2}$

c) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

d) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C.$

Giải

a) Ta có $(A+B)+C = \pi$ nên suy ra:

$$tg(A+B) = -tgC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{tgA + tgB}{1 - tgA\,tgB} = -tgC$$

hay là: $tgA + tgB + tgC = tgA\,tgB\,tgC.$

b) Ta có: $\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}\right) + \dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ nên suy ra:

$$cotg\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = tg\frac{C}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{cotg\frac{A}{2}cotg\frac{B}{2} - 1}{cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2}} = \frac{1}{cotg\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad cotg\frac{A}{2}cotg\frac{B}{2}cotg\frac{C}{2} = cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2}.$$

c) Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + \cos C$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C \quad \left(\text{vì } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \left(1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C &= 1+2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right]\\ &= 1+2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]\\ &= 1+2\sin\frac{C}{2}(-2)\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\\ &= 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

d) Vế trái $= (\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C$

$= 2\sin(A + B)\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$ (vì $(A + B) + C = \pi$)

$= 2\sin C[\cos(A - B) + \cos C]$

$= 2\sin C[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ (vì $(A + B) + C = \pi$)

$= 2\sin C\ (-2)\ \sin A\sin(-B)$

$= 4\sin A\sin B\sin C.$

Đề 1.41

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C = \frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}.$$

Giải

Theo hệ thức cosin trong tam giác, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad\Rightarrow\quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Theo hệ thức sin thì: $\sin A = \dfrac{a}{2R}$

Suy ra rằng: $$\mathrm{cotg}A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}. \qquad (1)$$

Lập luận tương tự, ta có:

$$\mathrm{cotg}B = \frac{R(a^2+c^2-b^2)}{abc} \qquad (2)$$

$$\mathrm{cotg}C = \frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}. \qquad (3)$$

Cộng vế (1), (2) và (3) ta được:

$$\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C = \frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}.$$

Đề 1.42

1. Cho tam giác ABC thỏa: $\mathrm{tgAtgB} = -2$ và $\mathrm{tgAtgC} = \frac{1}{2}$.

Tìm tgA, tgB, tgC.

2. Cho tam giác ABC thỏa: $\mathrm{tgAtgB} = m$ và $\mathrm{tgAtgC} = n$.

Tìm và biện luận theo m, n về giá trị của tgA, tgB, tgC.

Giải

1. Ta có: $(A + B) + C = \pi$ nên suy ra:

$$\mathrm{tg}(A + B) = -\mathrm{tgC} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{tgA} + \mathrm{tgB}}{1 - \mathrm{tgAtgB}} = -\mathrm{tgC}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tgA} + \mathrm{tgB} + \mathrm{tgC} = \mathrm{tgAtgBtgC}. \qquad (1)$$

Nhân hai vế của (1) cho tgA thì:

$$\mathrm{tg}^2A + \mathrm{tgAtgB} + \mathrm{tgAtgC} = (\mathrm{tgAtgB})(\mathrm{tgCtgA}) \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}^2A + (-2) + \frac{1}{2} = -2\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{(do giả thiết)}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}^2A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{tgA} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

+ Với $\mathrm{tgA} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (A là góc tù):

Suy ra $\mathrm{tgC} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên C cũng là góc tù. Điều này là vô lí vì một tam giác không thể có hai góc tù.

+ Với $\mathrm{tgA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

Suy ra: $\mathrm{tgB} = -2\sqrt{2}$ và $\mathrm{tg\,C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Kết luận: $\mathrm{tgA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tgB} = -2\sqrt{2}$, $\mathrm{tgC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Với $\mathrm{tgAtgB} = m$ và $\mathrm{tgAtgC} = n$ thì (2) cho ta:

$$\mathrm{tg}^2A + m + n = mn \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2A = mn - (m + n)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tgA} = \pm\sqrt{mn - (m + n)} \quad \text{(với điều kiện } mn > m + n\text{)}.$$

+ Với $\mathrm{tgA} = \sqrt{mn - (m + n)}$ thì suy ra:

$$\mathrm{tgB} = \frac{m}{\sqrt{mn - (m + n)}}, \quad \mathrm{tgC} = \frac{n}{\sqrt{mn - (m + n)}}$$

Kết quả này chỉ nhận được khi $m > 0$ và $n > 0$.

+ Với $\text{tg}A = -\sqrt{mn-(m+n)}$ thì suy ra:

$$\text{tg}B = \frac{-m}{\sqrt{mn-(m+n)}}, \qquad \text{tg}C = \frac{-n}{\sqrt{mn-(m+n)}}.$$

Kết quả này chỉ nhận được khi $m < 0$ và $n < 0$.

Kết luận:

- Nếu $m > 0$, $n > 0$, $mn > m + n$:

$$\text{tg}A = \sqrt{mn-(m+n)}, \quad \text{tg}B = \frac{m}{\sqrt{mn-(m+n)}}, \quad \text{tg}C = \frac{n}{\sqrt{mn-(m+n)}}$$

- Nếu $m < 0$, $n < 0$, $mn > m + n$:

$$\text{tg}A = -\sqrt{mn-(m+n)}, \quad \text{tg}B = \frac{-m}{\sqrt{mn-(m+n)}}, \quad \text{tg}C = \frac{-n}{\sqrt{mn-(m+n)}}$$

- Nếu $mn \le 0$ hay $mn \le m + n$: vô nghiệm.

Đề 1.43

Trong tam giác ABC cho r, R lần lượt là bán kính của đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác. Chứng minh rằng:

1. $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ **2.** $IA.IB.IC = 4Rr^2$

Giải

1. Ta có diện tích tam giác ABC được tính bởi: $S = pr$ và $S = \frac{abc}{4R}$

Suy ra: $pr = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow (a+b+c)r = \frac{abc}{2R}$ (với $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$)

$$\Leftrightarrow \quad 2R(\sin A + \sin B + \sin C)r = \frac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{2R}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{2R\sin A\sin B\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

Với $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

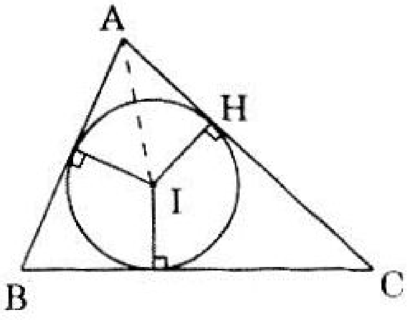
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right] = 2\cos\frac{C}{2}.2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

Do đó: $r = 2R.\dfrac{\sin A.\sin B.\sin C}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} = \dfrac{R}{2}.2\sin\dfrac{A}{2}.2\sin\dfrac{B}{2}.2\sin\dfrac{C}{2}$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

2. Trong tam giác vuông AHI có:



$IH = r$, $\widehat{IAH} = \dfrac{A}{2}$ nên ta có

$$IH = IA\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow r = IA\sin\frac{A}{2}.$$

Làm tương tự, ta có:

$$r = IB\sin\frac{B}{2} \quad \text{và} \quad r = IC\sin\frac{C}{2}.$$

Suy ra: $r^3 = IA.IB.IC.\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

mà theo câu 1, thì: $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{4R}$

nên: $r^3 = IA.IB.IC.\dfrac{r}{4R}$ hay là: $4Rr^2 = IA.IB.IC.$

Đề 1.44

Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C tạo thành một cấp số cộng và thỏa:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right).$$

Tính các góc A, B, C của tam giác.

Giải

Vì (A, B, C) là cấp số cộng nên: $A + C = 2B$

Ta lại có: $A + B + C = \pi$. Do đó: $B = \dfrac{\pi}{3}$ và $A + C = \dfrac{2\pi}{3}$. (*)

Mặt khác, ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) \quad \text{(vì (*))}$$

$$\Leftrightarrow 2.\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{C - A}{2} = \frac{\pi}{6}$ (giả sử A < B < C thì C − A > 0)

$\Leftrightarrow \quad C - A = \frac{\pi}{3}$.

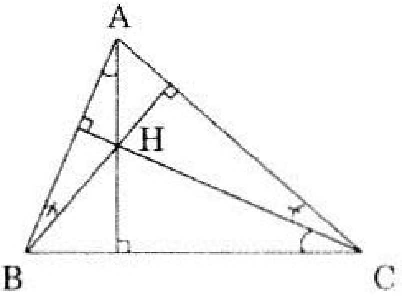
Với: $A + C = \frac{2\pi}{3}$ và $C - A = \frac{\pi}{3}$ suy ra: $C = \frac{\pi}{2}$, $A = \frac{\pi}{6}$.

Vậy: $A = \frac{\pi}{6}$, $B = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{2}$.

Đề 1.45

Cho H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng các tam giác ABH, ACH và BCH có cùng bán kính đường tròn ngoại tiếp.

Giải



Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABH, ta có:

$$\frac{BH}{\sin \widehat{BAH}} = 2R_1 \quad \text{(công thức sin)}$$

Gọi R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBCH, ta có:

$$\frac{BH}{\sin \widehat{BCH}} = 2R_2$$

mà $\widehat{BAH} = \widehat{BCH}$ (góc có cạnh đôi một vuông góc) do đó $R_1 = R_2$.

Gọi R_3 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔACH, ta có:

$$\frac{AH}{\sin \widehat{ACH}} = 2R_3.$$

Trong ΔABH, ta lại có: $\dfrac{AH}{\sin \widehat{ABH}} = 2R_1$

mà $\widehat{ACH} = \widehat{ABH}$ (góc có cạnh vuông góc) nên suy ra $R_1 = R_3$.

Vậy: $R_1 = R_2 = R_3$.

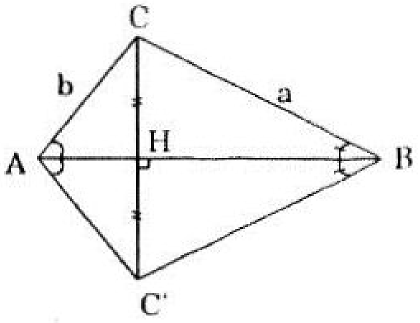
Đề 1.46

Cho tam giác ABC với BC = a, AC = b.

Chứng minh rằng $S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$, trong đó S là diện tích tam giác.

Giải

Gọi C' là đối xứng của C qua cạnh AB thì ta có: $\widehat{CAC'} = 2A$, $\widehat{CBC'} = 2B$ và:



$$2S = dt\left(C\overset{\Delta}{A}C'\right) + dt\left(C\overset{\Delta}{B}C'\right)$$

$$= \frac{1}{2}AC.AC'.\sin2A + \frac{1}{2}BC.BC'\sin2B$$

$$= \frac{1}{2}b^2\sin2A + \frac{1}{2}a^2\sin2B$$

(vì AC' = AC = b, BC' = BC = a).

Vậy: $S = \frac{1}{4}(a^2\sin2B + b^2\sin2A)$.

Đề 1.47

Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Chứng minh ba số: asinA, bsinB, csinC là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Giải

Ta cần chứng minh rằng: $a\sin A + b\sin B > c\sin C$,

$b\sin B + c\sin C > a\sin A$,

$c\sin C + a\sin A > b\sin B$.

Thật vậy, trong tam giác ABC thì có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \quad a^2 < b^2 + c^2 \quad \text{(vì } \Delta ABC \text{ nhọn nên } \cos A > 0)$$

$$\Rightarrow \quad a.\frac{a}{2R} < b.\frac{b}{2R} + c.\frac{c}{2R} \quad \text{(chia 2 vế cho 2R)}$$

$$\Rightarrow \quad a\sin A < b\sin B + c\sin C$$

Chứng minh hai bất đẳng thức còn lại tương tự.

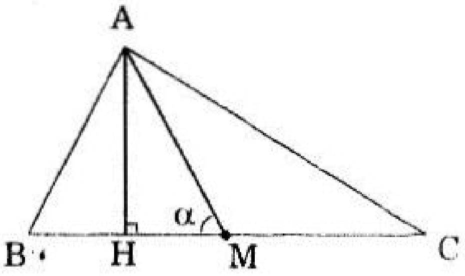
Kết luận: asinA, bsinB, csinC là ba cạnh của một tam giác.

Đề 1.48

Cho tam giác ABC có B > C, trung tuyến là AM. Đặt $\alpha = \widehat{AMB}$. Chứng minh rằng: $2\text{cotg}\alpha = \text{cotg}C - \text{cotg}B$.

Giải

Kẻ đường cao AH, ta có:



$$\text{cotg}C - \text{cotg}B = \frac{CH}{AH} - \frac{BH}{AH}$$

$$= \frac{(CM + MH) - (BM - MH)}{AH}$$

$$= \frac{2MH}{AH} \quad \text{(vì CM = BM)}$$

$$= 2\text{cotg}\alpha$$

(vì trong ΔAHM thì $\cot g\alpha = \dfrac{MH}{AH}$, trong ΔBAH thì $\cot gB = \dfrac{BH}{AH}$, trong ΔACH thì $\cot gC = \dfrac{CH}{AH}$).

Đề 1.49

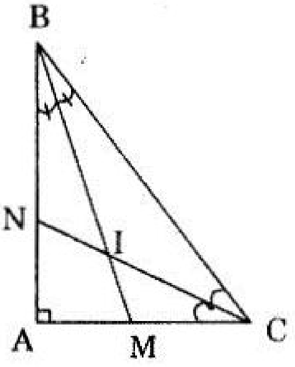
Cho tam giác ABC vuông tại A và thỏa $l_b^2.l_c^2 = m^2$ (với l_b, l_c lần lượt là độ dài các phân giác trong của các góc B và C).

1. Chứng minh rằng: $\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{m^2}{4a^2}$ (với a = BC)

2. Chứng minh rằng: $IB.IC = \dfrac{1}{2}m^2$ (với I là tâm đường tròn nội tiếp).

Giải

1. Đặt BC = a, AC = b, AB = c



Tam giác vuông ABC cho ta:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}; \qquad \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

Tam giác vuông ABM (BM là phân giác) cho ta:

$$\cos\frac{B}{2} = \frac{AB}{BM} = \frac{c}{l_b}$$

suy ra: $$\sin\frac{B}{2} = \frac{\sin B}{2\cos\frac{B}{2}} = \frac{b}{a}.\frac{l_b}{2c} = \frac{1}{2}.\frac{bl_b}{ac}.$$

Tam giác vuông ANC (NC là phân giác) cho ta: $\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{AC}{CN} = \dfrac{b}{l_c}$

suy ra: $$\sin\frac{C}{2} = \frac{\sin C}{2\cos\frac{C}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{c}{a}.\frac{l_c}{b}.$$

Do đó: $$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{4}.\frac{bl_b}{ac}.\frac{cl_c}{ab} = \frac{1}{4}\frac{l_bl_c}{a^2} = \frac{m^2}{4a^2}$$ (vì $l_bl_c = m^2$).

Vậy: $$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{m^2}{4a^2}.$$

2. Trong tam giác BIC, ta có:

$$\widehat{BIC} = \pi - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \pi - \frac{1}{2}(B + C)$$

$$= \pi - \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$ (vì ΔABC vuông tại A).

Trong tam giác BIC, ta lại có: $\dfrac{IC}{\sin\dfrac{B}{2}} = \dfrac{IB}{\sin\dfrac{C}{2}} = \dfrac{BC}{\sin\widehat{BIC}} = \dfrac{a}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = a\sqrt{2}$

suy ra: $IC = a\sqrt{2}\sin\dfrac{B}{2}$, $IB = a\sqrt{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

Do đó: $IB.IC = 2a^2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = 2a^2.\dfrac{m^2}{4a^2} = \dfrac{1}{2}m^2$ (do câu 1).

Vậy: $IB.IC = \dfrac{1}{2}m^2$.

Đề 1.50

Cho tam giác ABC thỏa $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \neq 1$ (trong đó m_b, m_c là các trung tuyến kẻ từ B và C). Chứng minh rằng: 2cotgA = cotgB + cotgC.

Giải

Theo đề bài ta có: $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \Rightarrow \dfrac{c^2}{b^2} = \dfrac{m_b^2}{m_c^2}$

mà hệ thức về trung tuyến cho ta:

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \quad \text{và} \quad a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

nên: $\dfrac{c^2}{b^2} = \dfrac{a^2 + c^2 - \dfrac{b^2}{2}}{a^2 + b^2 - \dfrac{c^2}{2}} \Leftrightarrow a^2c^2 + b^2c^2 - \dfrac{1}{2}c^4 = a^2b^2 + b^2c^2 - \dfrac{1}{2}b^4$

$\Leftrightarrow a^2(c^2 - b^2) - \dfrac{1}{2}(c^4 - b^4) = 0 \Leftrightarrow (c^2 - b^2)\left(a^2 - \dfrac{1}{2}(c^2 + b^2)\right) = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - \dfrac{1}{2}(c^2 + b^2) = 0$ (vì $\dfrac{c}{b} \neq 1 \Rightarrow c^2 - b^2 \neq 0$)

$\Leftrightarrow 2a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2a^2 = a^2 + 2bc\cos A$ (hệ thức cosin)

$\Leftrightarrow a^2 = 2bc\cos A$

$\Leftrightarrow (2R\sin A)^2 = 2(2R\sin B).(2R\sin C)\cos A$ (hệ thức sin)

$\Leftrightarrow \sin^2 A = 2\sin B \text{cin} C\cos A$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{\sin A}{2\sin B\sin C} = \dfrac{\sin(B + C)}{2\sin B\sin C}$ (vì $A + (B + C) = \pi$)

$\Leftrightarrow \text{cotg}A = \dfrac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{2\sin B\sin C} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos C}{\sin C} + \dfrac{\cos B}{\sin B}\right)$

$\Leftrightarrow 2\text{cotg}A = \text{cotg}C + \text{cotg}B$.

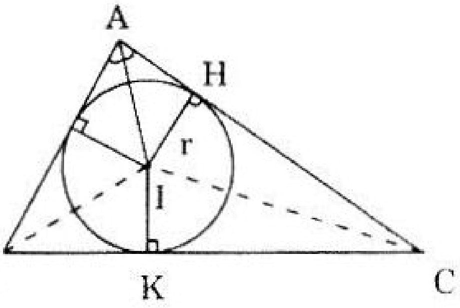
Đề 1.51

Cho tam giác ABC với BC = a, AC = b, AB = c và r là bán kính đường tròn nội tiếp.

1. Chứng minh rằng: $a = r\left(\text{cotg}\dfrac{B}{2} + \text{cotg}\dfrac{C}{2}\right)$

2. Chứng minh rằng: $(a - b)\text{cotg}\dfrac{C}{2} + (b - c)\text{cotg}\dfrac{A}{2} + (c - a)\text{cotg}\dfrac{B}{2} = 0$.

Giải



1. Tam giác vuông BIK cho ta:

$$BK = IK\text{cotg}\frac{B}{2} = r\text{cotg}\frac{B}{2}.$$

Tam giác vuông CIK cho ta:

$$CK = IK\text{cotg}\frac{C}{2} = r\text{cotg}\frac{C}{2}.$$

Suy ra $\quad BC = BK + CK = r\left(\text{cotg}\dfrac{B}{2} + \text{cotg}\dfrac{C}{2}\right)$.

Vậy: $\quad a = r\left(\text{cotg}\dfrac{B}{2} + \text{cotg}\dfrac{C}{2}\right)$.

2. Làm tương tự như câu 1, ta có:

$$b = r\left(\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right) \text{ và } c = r\left(\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2}\right).$$

Suy ra: $\quad (a - b)\text{cotg}\dfrac{C}{2} = r\left(\text{cotg}\dfrac{B}{2} - \text{cotg}\dfrac{A}{2}\right)\text{cotg}\dfrac{C}{2}$

$$(b - c)\text{cotg}\frac{A}{2} = r\left(\text{cotg}\frac{C}{2} - \text{cotg}\frac{B}{2}\right)\text{cotg}\frac{A}{2}$$

$$(c - a)\text{cotg}\frac{B}{2} = r\left(\text{cotg}\frac{A}{2} - \text{cotg}\frac{C}{2}\right)\text{cotg}\frac{B}{2}.$$

Do đó: $\quad (a - b)\text{cotg}\dfrac{C}{2} + (b - c)\text{cotg}\dfrac{A}{2} + (c - a)\text{cotg}\dfrac{B}{2} = 0$.

Đề 1.52

Cho tam giác ABC có ba cạnh thỏa: $a^4 = b^4 + c^4$.

1. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác nhọn.

2. Chứng minh rằng: $2\sin^2 A = \text{tg}B\text{tg}C$.

Giải

1. Vì $a^4 = b^4 + c^4$ nên: $a^4 > b^4$ và $a^4 > c^4$.

Suy ra: $a > b$ và $a > c$ nên: $0 < \frac{b}{a} < 1$ và $0 < \frac{c}{a} < 1$.

Do đó: $\left(\frac{b}{a}\right)^4 < \left(\frac{b}{a}\right)^2$ và $\left(\frac{c}{a}\right)^4 < \left(\frac{c}{a}\right)^2$.

Từ đó ta được: $\frac{b^4}{a^4} + \frac{c^4}{a^4} < \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2} > 1$ (vì $a^4 = b^4 + c^4$).

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 > a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Suy ra: $\cos A > 0$ nên A là góc nhọn.

Ngoài ra vì $a > b$ và $a > c$ nên $A > B$ và $A > C$; do đó các góc B và C đều là góc nhọn.

Vậy tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

2. Ta có: $$\mathrm{tgBtgC} = \frac{\sin B.\sin C}{\cos B.\cos C} = \frac{\sin B.\sin C}{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

$$= \frac{4a^2bc\sin B\sin C}{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} = \frac{4a^2bc\sin B\sin C}{a^4 - (c^2 - b^2)^2}$$

$$= \frac{4a^2bc\sin B\sin C}{a^4 - (c^4 + b^4 - 2b^2c^2)}$$

$$= \frac{4a^2bc\sin B\sin C}{2b^2c^2} \quad (\text{vì } a^4 = b^4 + c^4)$$

$$= 2\frac{a^2\sin B\sin C}{bc} = \frac{2(2R\sin A)^2.\sin B\sin C}{(2R\sin B).(2R\sin C)} = 2\sin^2 A$$

Vậy ta đã chứng minh rằng: $2\sin^2 A = \mathrm{tgBtgC}$.

Đề 1.53

Cho tam giác ABC thỏa $2A + 3B = \pi$.

1. Biểu diễn A, C theo B.

2. Chứng minh rằng: $a + b \le \frac{5}{4}c$ (trong đó a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác).

Giải

1. Theo đề bài ta có: $2A + 3B = \pi$ nên $A = \frac{\pi}{2} - \frac{3B}{2}$.

Suy ra: $$C = \pi - (A + B) = \pi - \left[\frac{\pi}{2} - \frac{3B}{2} + B\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$$

2. Từ câu 1, ta suy ra: $$\sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3B}{2}\right) = \cos\frac{3B}{2}$$

$$\sin C = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cos\frac{B}{2}.$$

Ta có: $a + b \le \frac{5}{4}c \quad \Leftrightarrow \quad \sin A + \sin B \le \frac{5}{4}\sin C$ (do hệ thức sin)

$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{3B}{2} + \sin B \le \frac{5}{4}\cos\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \left(4\cos^3\frac{B}{2} - 3\cos\frac{B}{2}\right) + 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} \le \frac{5}{4}\cos\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2\frac{B}{2} - 3 + 2\sin\frac{B}{2} \le \frac{5}{4} \quad \left(\text{Vì } \cos\frac{B}{2} > 0\right)$

$\Leftrightarrow \quad 4\left(1 - \sin^2\frac{B}{2}\right) - 3 + 2\sin\frac{B}{2} \le \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2\frac{B}{2} - 2\sin\frac{B}{2} + \frac{1}{4} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2\sin\frac{B}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0.$

Vậy ta đã chứng minh rằng: $a + b \le \frac{5}{4}c$.

Đề 1.54

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $A = 2B \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$.

Giải

Ta có: $a^2 = b^2 + bc \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + bc$ (hệ thức cosin)

$\Leftrightarrow \quad 2bc\cos A = c^2 - bc \quad \Leftrightarrow \quad 2b\cos A = c - b$

$\Leftrightarrow \quad 2(2R\sin B)\cos A = 2R\sin C - 2R\sin B$ (hệ thức sin)

$\Leftrightarrow \quad 2\sin B\cos A = \sin C - \sin B$

$\Leftrightarrow \quad \sin(B + A) + \sin(B - A) = \sin C - \sin B.$

$\Leftrightarrow \quad \sin(B - A) = -\sin B$ (vì $A + B + C = \pi \Rightarrow \sin C = \sin(A + B)$)

$\Leftrightarrow \quad \sin(B - A) + \sin B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{2B - A}{2}.\cos\frac{A}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{2B - A}{2} = 0 \quad \left(\text{vì } \cos\frac{A}{2} > 0\right)$

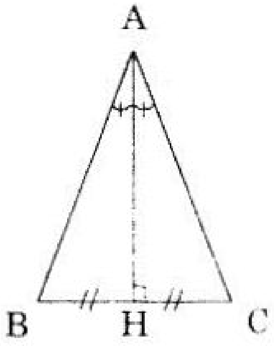
$\Leftrightarrow \quad \frac{2B - A}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 2B.$

Vậy ta đã chứng minh rằng: $A = 2B \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$.

Đề 1.55

Cho tam giác ABC với $\widehat{A} = 20^\circ$, BC = a, AC = b, AB = c.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = 3ab^2$.



Giải

Tam giác vuông AHB cho ta:

$$BH = AB\sin 10^\circ \quad (\text{vì } AB = AC \text{ nên } \widehat{BAH} = 10^\circ)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2} = b\sin 10^\circ$$

$$\Rightarrow \quad a = 2b\sin 10^\circ.$$

Do đó, ta có:

$$a^3 + b^3 = 3ab^2 \quad \Leftrightarrow \quad (2b\sin 10^\circ)^3 + b^3 = 3.(2b\sin 10^\circ)b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\sin^3 10^\circ + 1 = 6\sin 10^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = 2(3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \sin 30^\circ. \quad \text{Điều này đúng.}$$

Vậy ta đã chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Đề 1.56

1. Trong tam giác ABC, chứng minh:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

2. Cho 3 góc nhọn A, B, C thỏa:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

Chứng minh rằng A, B, C là ba góc của một tam giác.

Giải

1. Ta có: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2B) + \cos^2 C$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$$

$$= 1 + \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C$$

$$= 1 - \cos C.\cos(A - B) + \cos^2 C$$

(vì $\cos(A + B) = -\cos C$)

$$= 1 - \cos C(\cos(A - B) - \cos C]$$

$$= 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$= 1 - 2\cos C\cos A\cos B.$$

Vậy ta đã chứng minh: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$.

2. Theo giả thiết, ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2B) + \cos^2 C = 1 - [\cos(A + B) + \cos(A - B)]\cos C$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = -[\cos(A + B) + \cos(A - B)]\cos C$

$\Leftrightarrow \quad \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C + [\cos(A + B) + \cos(A - B)]\cos C = 0.$

$\Leftrightarrow \quad [\cos C + \cos(A + B)][\cos C + \cos(A - B)] = 0 \qquad (*)$

Vì C là góc nhọn nên $\cos C > 0$.

Vì A, B là góc nhọn nên $-\frac{\pi}{2} < A - B < \frac{\pi}{2}$, do đó $\cos(A - B) > 0$.

Ta có: $\cos C + \cos(A - B) > 0$ nên từ (*) suy ra:

$$\cos C + \cos(A + B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right) = 0 \quad \text{hay} \quad \cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{hay} \quad \frac{A+B-C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A + B + C = \pi \quad \text{hay} \quad A + B - C = \pi$$

Vì A, B, C đều nhọn nên $A + B - C < \pi$.

Vậy ta chỉ nhận $A + B + C = \pi$. Điều này chứng tỏ A, B, C là ba góc của một tam giác.

Đề 1.57

Cho tam giác ABC thỏa: $3\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} = 1$. Chứng minh rằng: $a + b = 2c$.

Giải

Ta có: $a + b = 2c \quad \Leftrightarrow \quad \sin A + \sin B = 2\sin C$ (hệ thức sin)

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2} \qquad \left(\text{vì } \sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2} \qquad \left(\text{do } \frac{C}{2} + \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3.\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} = 1.$$

Vậy ta đã chứng minh rằng nếu có: $3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 1$ thì sẽ có: $a + b = 2c$.

Đề 1.58

Cho tam giác ABC có $\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}, \operatorname{cotg}\frac{B}{2}, \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$ tạo nên một cấp số cộng. Chứng minh rằng các cạnh (a, b, c) là một cấp số cộng.

Giải

Theo đề bài, $\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}, \operatorname{cotg}\frac{B}{2}, \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$ là một cấp số cộng nên:

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = 2\operatorname{cotg}\frac{B}{2}. \qquad (1)$$

Trong tam giác ABC thì: $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\text{nên} \quad \operatorname{cotg}\left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{B}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} - 1}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$3\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 3 = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad 3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1. \qquad (3)$$

Theo bài 1.57 thì từ (3) ta có: $a + c = 2b$.

Do đó (a, b, c) tạo nên một cấp số cộng.

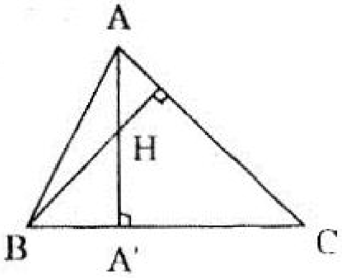
Đề 1.59

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, có trực tâm là H, đường cao AA' và thỏa AH = k.A'H.

1. Tính tích số tgB.tgC theo k.

2. Chứng minh rằng: $\operatorname{tg}A \geq \frac{2}{k}\sqrt{k+1}$.

Giải



1. Tam giác vuông ABA' cho ta: $\operatorname{tg}B = \frac{AA'}{BA'}$

Tam giác vuông ACA' cho ta: $\operatorname{tg}C = \frac{AA'}{A'C}$

Suy ra: $\quad \text{tgB.tgC} = \dfrac{(AA')^2}{A'B.A'C}$.

Hai tam giác vuông BA'H và AA'C là đồng dạng nên:

$$\frac{BA'}{AA'} = \frac{A'H}{A'C} \quad \Leftrightarrow \quad A'B.A'C = A'H.A'A$$

Do đó $\quad \text{tgB.tgC} = \dfrac{(AA')^2}{A'H.A'A} = \dfrac{A'A}{A'H} = \dfrac{A'H + AH}{A'H}$

$$= 1 + \frac{AH}{A'H} = 1 + k \qquad (\text{vì } AH = kA'H).$$

Vậy: $\quad \text{tgB.tgC} = 1 + k$.

2. Từ $A + (B + C) = \pi$, ta có:

$$\text{tgA} = -\text{tg}(B + C) = \frac{\text{tgB} + \text{tgC}}{\text{tgBtgC} - 1} = \frac{\text{tgB} + \text{tgC}}{(1 + k) - 1} \quad (\text{do câu 1})$$

$$\Rightarrow \quad \text{tgA} = \frac{\text{tgB} + \text{tgC}}{k}.$$

Tam giác có 3 góc nhọn nên: $\text{tgB} > 0$, $\text{tgC} > 0$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\text{tgB} + \text{tgC} \geq 2\sqrt{\text{tgBtgC}} = 2\sqrt{1 + k} \qquad (\text{do câu 1}).$$

Do đó: $\quad \text{tgA} \geq \dfrac{2}{k}\sqrt{1 + k}$.

Đề 1.60

Cho tam giác ABC với r, R lần lượt là bán kính của đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp.

1. Chứng minh rằng: $\dfrac{r}{R} = 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

2. Chứng minh rằng: $1 + \dfrac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$.

Giải

1. Trong ΔABC, ta có: $\quad S = pr \quad$ và $\quad S = \dfrac{abc}{4R}$

nên ta có: $\quad \dfrac{r}{R} = \dfrac{S}{p}.\dfrac{4S}{abc} = \dfrac{4S^2}{pabc} = \dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{r}{R} = 4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{1}{2}.\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{abc}$$

Với a = 2RsinA, b = 2RsinB, c = 2RsinC nên:

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}\frac{(\sin B + \sin C - \sin A)(\sin A + \sin C - \sin B)(\sin A + \sin B - \sin C)}{\sin A \sin B \sin C}$$

Ta lại có: $\sin B + \sin C - \sin A = 2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$= 2\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2\cos\frac{A}{2}\left[\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{A}{2}(-2)\sin\frac{B}{2}\sin\left(-\frac{C}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Làm tương tự, ta có:

$$\sin A + \sin C - \sin B = 4\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

Do đó: $$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}.\frac{4^3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}.2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{r}{R} = 4.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

2. Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] = 2\sin\frac{C}{2}(-2)\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Do đó suy ra rằng: $\frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C - 1$

hay $1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C.$

Đề 1.61

Cho tam giác ABC có C = 2B = 4A. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{1}{b}$.

Giải

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} C = 2B = 4A \\ A + B + C = \pi \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{7},\ B = \frac{2\pi}{7} \text{ và } C = \frac{4\pi}{7}.$$

Do đó: $\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{\sin B}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C - \sin A = \frac{\sin A.\sin C}{\sin B} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} = \frac{\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} = 2\cos\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{\pi}{7} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7}.$$

Điều này là đúng vì $\frac{4\pi}{7} + \frac{3\pi}{7} = \pi$.

Vậy ta đã chứng minh rằng: $\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{1}{b}$.

Đề 1.62

Cho tam giác ABC có 3 cạnh a, b, c theo thứ tự đó tạo thành một cấp số cộng với công sai là t.

1. Chứng minh: $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

2. Chứng tỏ rằng: $t = \frac{3}{2}r\left(\text{tg}\frac{C}{2} - \text{tg}\frac{A}{2}\right)$.

Giải

1. Xem câu 1 của đề 1.60

2. Ta có $t = b - a = c - b = \frac{c - a}{2}$

nên $t = R(\sin C - \sin A) = 2R\cos\frac{A + C}{2}\sin\frac{C - A}{2}$

$$t = 2R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}$$

$$= \frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}.\sin\frac{C-A}{2}.\sin\frac{B}{2} \quad \text{(do câu 1)}$$

$$= \frac{1}{2}r\frac{\sin\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{r}{2}.\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{r}{2}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} - \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right) = \frac{r}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} - \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right). \qquad (1)$$

Mặt khác do (a, b, c) là cấp số cộng nên ta có:

$$a + c = 2b \Leftrightarrow \quad \sin A + \sin C = 2\sin B$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A-C}{2} = 2\sin\frac{B}{2} \quad \left(\text{vì } \sin\frac{A+C}{2} = \cos\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}. \qquad (2)$$

Ta lại có: $3\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{A}{2} - \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 3.\frac{\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{A}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

nên từ (2) ta có: $3\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{A}{2} - \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$.

Và do đó (1) trở thành: $t = \frac{3r}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2} - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)$.

§5. ĐỊNH DẠNG TAM GIÁC

Đề 1.63

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu $tgB\sin^2C = tgC.\sin^2B$ thì tam giác là vuông hay cân.

b) Nếu $8\cos A\cos B\cos C = 1$ thì tam giác là đều.

Giải

a) Ta có: $tgB\sin^2C = tgC.\sin^2B \Rightarrow \frac{\sin B}{\cos B}.\sin^2 C = \frac{\sin C}{\cos C}.\sin^2 B$

$\Rightarrow \sin C\cos C = \sin B\cos B \Rightarrow \sin 2C = \sin 2B$ (vì $\sin 2x = 2\sin x\cos x$)

$\Rightarrow 2C = 2B$ hay $2C + 2B = \pi$

$\Rightarrow C = B$ hay $C + B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = B$ hay $A = \frac{\pi}{2}$.

Vậy tam giác cân tại A hay vuông tại A.

b) Ta có: $8\cos A\cos B\cos C = 1 \Rightarrow 4(2\cos A\cos B)\cos C = 1$

$\Rightarrow 4[\cos(A + B) + \cos(A - B)]\cos C = 1$

$\Rightarrow 4(-\cos C + \cos(A - B))\cos C = 1$ (vì $(A + B) + C = \pi$)

$\Rightarrow 4\cos^2C - 4\cos(A - B)\cos C + 1 = 0$

$\Rightarrow [2\cos C - \cos(A - B)]^2 + \sin^2(A - B) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cos C - \cos(A - B) = 0 & (1) \\ \sin(A - B) = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có: $A - B = 0 \Leftrightarrow A = B$.

Thế vào (1) ta được: $\cos C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{3}$.

Do $A = B$ và $C = \frac{\pi}{3}$ nên tam giác là đều.

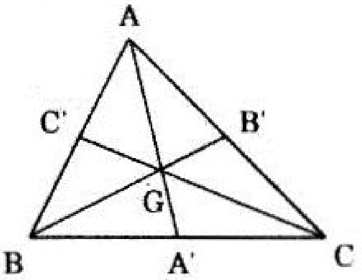
Đề 1.64

Gọi AA' và BB' là các trung tuyến của tam giác ABC.

Chứng minh: $AA' \perp BB' \Leftrightarrow \cot gC = 2(\cot gA + \cot gB)$.

Giải

Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AA' = m_a$, $BB' = m_b$.



Ta có: $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$

$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$

nên: $2(m_a^2 + m_b^2) = 2c^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

$$\Leftrightarrow \quad m_a^2 + m_b^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 4c^2). \qquad (1)$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì có:

$$m_a = \frac{3}{2}AG \quad \text{và} \quad m_b = \frac{3}{2}BG.$$

Do đó (1) cho ta: $\frac{9}{4}(AG^2 + BG^2) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 4c^2)$

$$\Leftrightarrow \quad AG^2 + BG^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + 4c^2). \qquad (2)$$

Ta có: $AA' \perp BB' \Leftrightarrow$ Tam giác AGB vuông tại G

$\Leftrightarrow \quad AG^2 + BG^2 = AB^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + 4c^2) = c^2$ (do (2))

$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 5c^2$

$\Leftrightarrow \quad c^2 + 2ab\cos C = 5c^2$ (vì $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$)

$\Leftrightarrow \quad ab\cos C = 2c^2$

$\Leftrightarrow \quad \sin A\sin B\cos C = 2\sin^2 C \quad \left(\text{vì } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos C}{\sin C} = 2.\frac{\sin C}{\sin A\sin B}$

$\Leftrightarrow \quad \text{cotg}C = 2.\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}$ (vì $\sin(A + B) = \sin C$)

$\Leftrightarrow \quad \text{cotg}C = 2(\text{cotg}A + \text{cotg}B).$

Vậy bài toán đã được chứng minh xong.

Đề 1.65

Cho tam giác ABC thỏa: $\text{tg}A + \text{tg}B = 2\text{cotg}\frac{C}{2}$ (*).

Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C.

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = 2.\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$

$\Leftrightarrow \sin C\sin\frac{C}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\cos A\cos B$ (vì có $\sin(A + B) = \sin C$)

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\cos A\cos B \quad \left(\text{Vì } \sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2\frac{C}{2} = 2\cos A\cos B$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos C = \cos(A + B) + \cos(A - B)$

$\Leftrightarrow \quad \cos(A - B) = 1 \quad (\text{vì } \cos(A + B) = -\cos C)$

$\Leftrightarrow \quad A - B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B.$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

Đề 1.66

Cho tam giác ABC thỏa: bsin2B + ccos2B = c (*).

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

Giải

Ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

nên (*) $\Leftrightarrow \quad b\sin 2B = c(1 - \cos 2B)$

$\Leftrightarrow \quad \sin B.\sin 2B = \sin C.2\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 B\cos B = 2\sin C.\sin^2 B \quad (\text{vì } \sin 2B = 2\sin B\cos B)$

$\Leftrightarrow \quad \cos B = \sin C \quad (\text{vì } \sin B \neq 0)$

$\Leftrightarrow \quad B + C = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{\pi}{2}.$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

Đề 1.67

Cho tam giác ABC thỏa: 2(acosA + bcosB + ccosC) = a + b + c (*)

Chứng minh rằng tam giác ABC là đều.

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 2(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) = \sin A + \sin B + \sin C$

(do định lý sin)

$\Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sin A + \sin B + \sin C.$

Với vế trái $= 2\sin(A + B)\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C\cos(A - B) + 2\sin C\cos C \quad (\text{vì } \sin(A + B) = \sin C)$

$= 2\sin C[\cos(A - B) + \cos C]$

$= 2\sin C[\cos(A - B) - \cos(A + B)] \quad (\text{vì } \cos C = -\cos(A + B))$

$= 2\sin C\,(-2)\sin A.\sin(-B)$

$= 4\sin A\sin B\sin C.$

Vế phải $= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \quad \left(\text{vì } \sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right] \quad \left(\text{vì } \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}.2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow \sin A\sin B\sin C = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 \quad \left(\text{vì } \sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},\ldots\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right).4\sin\frac{C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = 1 \left(\text{vì } \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2} = 0 & (1) \\ \sin\frac{A-B}{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \frac{A-B}{2} = 0 \Leftrightarrow A = B$

Thế A = B vào (1) thì: $2\sin\frac{C}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{3}.$$

Với ($A = B$ và $C = \frac{\pi}{3}$) nên tam giác ABC là đều.

Đề 1.68

1. Cho tam giác ABC thỏa: $a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B$ (1)

Chứng minh tam giác là vuông hay cân.

2. Cho tam giác ABC thỏa (1) và thỏa:

$$\sin 2A + \sin 2B + \cos 2A + \cos 2B = \sqrt{2} \qquad (2)$$

Tìm các góc của tam giác.

Giải

1. Ta có (1) cho ta:

$$\sin A\cos B - \sin B\cos A = \sin^2 A - \sin^2 B \quad (\text{vì } a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = \frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = -\sin(B + A)\sin(B - A)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = \sin(B + A)\sin(A - B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B)[\sin(A + B) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = 0 \text{ hay } \sin(A + B) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad A - B = 0 \quad \text{hay} \quad A + B = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = B \quad \text{hay} \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy tam giác cân hay vuông tại C.

2. Theo câu 1 thì (1) cho $A = B$ hay $C = \frac{\pi}{2}$.

+ Xét $A = B$:

Thế vào (2) ta có:

$$2(\sin 2A + \cos 2A) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2.\sqrt{2}\cos\left(2A - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2A - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2A - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{7\pi}{24}.$$

Với $A = \frac{7\pi}{24}$ thì suy ra: $B = \frac{7\pi}{24}$ và $C = \frac{5\pi}{12}$.

+ Xét $C = \frac{\pi}{2}$ (tức là $A + B = \frac{\pi}{2}$)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \quad (\sin 2A + \sin 2B) + (\cos 2A + \cos 2B) = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin(A + B)\cos(A - B) + 2\cos(A + B)\cos(A - B) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(A - B) = \sqrt{2} \qquad (\text{vì } \sin(A + B) = 1,\ \cos(A + B) = 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A - B) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad A - B = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Với: $\begin{cases} A - B = \dfrac{\pi}{4} \\ A + B = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad A = \dfrac{3\pi}{8},\ B = \dfrac{\pi}{8}.$

Với: $\begin{cases} A - B = -\dfrac{\pi}{4} \\ A + B = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad A = \dfrac{\pi}{8},\ B = \dfrac{3\pi}{8}.$

Vậy: $\left(A = B = \dfrac{7\pi}{24},\ C = \dfrac{5\pi}{12}\right)$ hay $\left(A = \dfrac{3\pi}{8},\ B = \dfrac{\pi}{8},\ C = \dfrac{\pi}{2}\right)$

hay $\left(A = \dfrac{\pi}{8},\ B = \dfrac{3\pi}{8},\ C = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đề 1.69

Cho tam giác ABC thỏa: $a\left(\text{cotg}\dfrac{C}{2} - \text{tg}A\right) = b\left(\text{tg}B - \text{cotg}\dfrac{C}{2}\right)$

Chứng minh rằng tam giác là cân.

Giải

Giả thiết cho ta: $\sin A\left(\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} - \dfrac{\sin A}{\cos A}\right) = \sin B\left(\dfrac{\sin B}{\cos B} - \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right)$

$$\Rightarrow \quad \sin A.\frac{\cos\left(\frac{C}{2} + A\right)}{\sin\frac{C}{2}.\cos A} = \sin B.\frac{-\cos\left(B + \frac{C}{2}\right)}{\cos B.\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin A.\cos B\cos\left(\frac{C}{2} + A\right) = -\sin B\cos A\cos\left(B + \frac{C}{2}\right)$$

$$\left(\left(\frac{C}{2} + A\right) + \left(\frac{C}{2} + B\right) = A + B + C = \pi \ \Rightarrow\ \cos\left(\frac{C}{2} + A\right) = -\cos\left(B + \frac{C}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{C}{2} + A\right)[\sin A\cos B - \sin B\cos A] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{C}{2} + A\right)\sin(A - B) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{C}{2} + A\right) = 0 \quad \text{hay} \quad \sin(A - B) = 0.$$

+ Nếu $\cos\left(\frac{C}{2} + A\right) = 0$ thì: $\frac{C}{2} + A = \frac{\pi}{2}$

Ta suy ra: $\frac{C}{2} + B = \frac{\pi}{2}$ (vì $\frac{C}{2} + A + \frac{C}{2} + B = \pi$).

Do đó: $\frac{C}{2} + A = \frac{C}{2} + B \Rightarrow A = B.$

+ Nếu $\sin(A - B) = 0$ thì $A - B = 0 \Rightarrow A = B.$

Vậy tam giác cân tại C.

Đề 1.70

1. Cho tam giác ABC thỏa:

$$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C < 1.$$

Chứng minh tam giác có ba góc đều nhọn.

2. Cho tam giác có 3 góc đều nhọn và thỏa:

$$\sin5A + \sin5B + \sin5C = 0 \qquad (*)$$

Chứng minh tam giác có ít nhất một góc bằng 36°.

Giải

1. Ta có: $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C < 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(1 + \cos2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos2B) + \cos^2C < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) + \cos^2C < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2C < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos C\cos(A - B) + \cos^2C < 0 \qquad (\text{vì } \cos(A + B) = -\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C[\cos C - \cos(A - B)] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C[-\cos(A + B) - \cos(A - B)] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C[\cos(A + B) + \cos(A - B)] > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C.\cos A\cos B > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A > 0 \text{ và } \cos B > 0 \text{ và } \cos C > 0$$

(vì trong tam giác không thể có 2 góc có cosin < 0)

⇔ A nhọn và B nhọn và C nhọn.

Vậy tam giác có 3 góc đều nhọn.

2. Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2\sin\frac{5(A+B)}{2}\cos\frac{5(A-B)}{2} + 2\sin\frac{5C}{2}\cos\frac{5C}{2} = 0$$

$$\left(\frac{5(A+B)}{2} + \frac{5C}{2} = \frac{5(A+B+C)}{2} = \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \Rightarrow \sin\frac{5(A+B)}{2} = \cos\frac{5C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5C}{2}\cos\frac{5(A-B)}{2} + 2\sin\frac{5C}{2}\cos\frac{5C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{5C}{2}\left[\cos\frac{5(A-B)}{2} + \sin\frac{5C}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{5C}{2}\left[\cos\frac{5(A-B)}{2} + \cos\frac{5(A+B)}{2}\right] = 0 \left(\text{vì } \cos\frac{5(A+B)}{2} = \sin\frac{5C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{5C}{2}.\cos\frac{5A}{2}.\cos\frac{5B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{5A}{2} = 0 \text{ hay } \cos\frac{5B}{2} = 0 \text{ hay } \cos\frac{5C}{2} = 0.$$

Xét $\cos\frac{5A}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5A}{2} = \frac{\pi}{2}$ hay $\frac{5A}{2} = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{5}$ hay $A = \frac{3\pi}{5}$

$\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{5}$ (vì tam giác nhọn nên không nhận $A = \frac{3\pi}{5}$).

Do đó: $(*) \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{5}$ hay $B = \frac{\pi}{5}$ hay $C = \frac{\pi}{5}$.

Vậy tam giác có ít nhất một góc bằng 36°.

Đề 1.71

Cho tam giác ABC nhọn và thỏa: $\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0$ (*)

Chứng minh rằng tam giác có ít nhất một góc bằng 60°.

Giải

Ta có:

$(*) \Leftrightarrow 2\sin(3A+3B)\cos(3A-3B) + 2\sin 3C\cos 3C = 0$

$((3A+3B) + 3C = 3(A+B+C) = 3\pi \Rightarrow \sin(3A+3B) = \sin 3C)$

$\Leftrightarrow 2\sin 3C[\cos(3A-3B) + \cos 3C] = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3C[\cos(3A-3B) - \cos(3A+3B)] = 0$ (vì $(3A+3B) + 3C = 3\pi$)

$\Leftrightarrow \sin 3C.(-2)\sin 3A.\sin(-3B) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3A.\sin 3B.\sin 3C = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3A = 0$ hay $\sin 3B = 0$ hay $\sin 3C = 0$.

Với $\sin 3A = 0 \Leftrightarrow 3A = \pi$ (vì $A < \frac{\pi}{2}$ theo đề bài) $\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}$.

Do đó: (*) $\Leftrightarrow$ $A = \dfrac{\pi}{3}$ hay $B = \dfrac{\pi}{3}$ hay $C = \dfrac{\pi}{3}$.

Vậy tam giác có ít nhất một góc bằng 60°.

Đề 1.72

Tam giác ABC thỏa: $\mathbf{tgA + 2tgB = tgAtg^2B}$ (*).

Chứng minh tam giác là cân.

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow$ $tgA + tgB = tgB(tgAtgB - 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{tgA + tgB}{tgAtgB - 1} = tgB \quad \Leftrightarrow \quad -tg(A + B) = tgB$$

$\Leftrightarrow$ $tgC = tgB$ (vì $A+B+C = \pi \Rightarrow tgC = -tg(A+B)$)

$\Leftrightarrow$ $C = B$.

Vậy tam giác ABC cân tại A.

Đề 1.73

1. Chứng minh trong tam giác ABC thì:

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \frac{abc}{R(ab + bc + ca)} \qquad (1)$$

(với a, b, c là 3 cạnh và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp)

2. Cho tam giác ABC thỏa:

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \frac{2p}{9R} \qquad (2)$$

(với p là nửa chu vi của tam giác).

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Giải

1. Do $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ nên ta có:

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin B + b\sin C + c\sin A} = \frac{2R(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C)}{2R(ab + bc + ca)}$$

$$= 2R^2.\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{ab + bc + ca}$$

$$= 2R^2.\frac{4\sin A\sin B\sin C}{ab + bc + ca}$$

(vì $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$)

$$= 8R^2.\frac{\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}}{ab + bc + ca} = \frac{abc}{R(ab + bc + ca)}.$$

Vậy (1) đã được chứng minh.

2. Từ (1) và (2), ta có: $\dfrac{abc}{R(ab+bc+ca)} = \dfrac{a+b+c}{9R}$

$$\Rightarrow \quad (a+b+c)(ab+bc+ca) = 9abc. \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}\ .$$

Nhân vế với vế 2 bất đẳng thức trên, ta được:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc.$$

Bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi $a = b = c$.

Do đó: $(3) \Rightarrow a = b = c$ tức là tam giác là đều.

Đề 1.74

Cho tam giác ABC thỏa: $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$ (*)

Chứng minh rằng tam giác là vuông.

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \quad (3\cos B + 4\sin B) + (6\sin C + 8\cos C) = 15$$

Theo bất đẳng thức Svac – xơ, ta có:

$$3\cos B + 4\sin B \leq \sqrt{(9+16)(\cos^2 B + \sin^2 B)} = 5 \qquad (1)$$

$$6\sin C + 8\cos C \leq \sqrt{(36+64)(\sin^2 C + \cos^2 C)} = 10\ . \qquad (2)$$

Cộng vế hai bất đẳng thức trên, ta được:

$$3\cos B + 4\sin B + 6\sin C + 8\cos C \leq 15.$$

Do đó (*) thỏa khi (1) và (2) đều trở thành đẳng thức, tức là phải có:

$$\begin{cases} \dfrac{\cos B}{3} = \dfrac{\sin B}{4} \\ \dfrac{\sin C}{6} = \dfrac{\cos C}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}B = \dfrac{4}{3} \\ \mathrm{tg}C = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Suy ra: $\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C = 1 \Rightarrow \mathrm{tg}B = \mathrm{cotg}C \Rightarrow B + C = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{2}$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

Đề 1.75

1. Cho tam giác ABC có các góc A, B đều nhọn. Chứng minh rằng:

$$\mathbf{tgA + tgB \geq 2tg\left(\frac{A+B}{2}\right)} \qquad (1)$$

2. Cho tam giác ABC có các góc A, B đều nhọn và thỏa:

$$\mathbf{tg^2A + tg^2B = 2tg^2\left(\frac{A+B}{2}\right).} \qquad (2)$$

Chứng minh tam giác ABC cân tại C.

Giải

1. Ta có: (1) $\Leftrightarrow$ $$\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} \geq \frac{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\left(\text{vì } 0 < \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) > 0\right)$$

(1) $\Leftrightarrow$ $$\frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos A\cos B} \geq \frac{1}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\left(\text{vì } \sin(A+B) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow$ $$\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \cos A\cos B$$

(vì A, B nhọn nên $\cos A > 0$, $\cos B > 0$ và $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) > 0$)

$\Leftrightarrow$ $$\frac{1}{2}[1 + \cos(A+B)] \geq \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$\Leftrightarrow$ $1 \geq \cos(A - B)$. Điều này đúng.

Vậy (1) đã được chứng minh.

2. Từ (1) suy ra: $$(\text{tg}A + \text{tg}B)^2 \geq 4\text{tg}^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Do đó (2) cho ta: $$\text{tg}^2A + \text{tg}^2B = 2\text{tg}^2\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\text{tg}A + \text{tg}B)^2$$

$\Rightarrow$ $2(\text{tg}^2A + \text{tg}^2B) \leq (\text{tg}A + \text{tg}B)^2$

$\Rightarrow$ $\text{tg}^2A + \text{tg}^2B - 2\text{tg}A\text{tg}B \leq 0$

$\Rightarrow$ $(\text{tg}A - \text{tg}B)^2 \leq 0$

$\Rightarrow$ $\text{tg}A - \text{tg}B = 0$ $\Rightarrow$ $\text{tg}A = \text{tg}B$ $\Rightarrow$ $A = B$.

Vậy tam giác cân tại C.

Đề 1.76

Cho tam giác ABC thỏa: $a\,\text{tg}B + b\,\text{tg}A = (a+b)\,\text{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)$ (*)

Chứng minh tam giác là cân hay vuông.

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \quad a\left[\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)\right] = b\left[\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right) - \operatorname{tg}A\right]$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A.\frac{\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)}{\cos B.\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \sin B.\frac{\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A\cos A.\ \sin\left(\frac{B-A}{2}\right) = \sin B\cos B\ .\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2A.\ \sin\left(\frac{B-A}{2}\right) = \sin 2B.\ \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)[\sin 2A - \sin 2B] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{B-A}{2}\right) = 0 \quad \text{hay} \quad \sin 2A = \sin 2B$$

$$\Leftrightarrow \quad B - A = 0 \quad \text{hay} \quad 2A = 2B \quad \text{hay} \quad 2A + 2B = \pi$$

$$\Leftrightarrow \quad B = A \quad \text{hay} \quad A + B = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = A \quad \text{hay} \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy tam giác cân hay vuông tại C.

Đề 1.77

Cho tam giác ABC thỏa:

$$\mathbf{\sin A + \sin B + \sin C = \sqrt{3}\,(\cos A + \cos B + \cos C)} \qquad (*)$$

Chứng minh tam giác có ít nhất một góc bằng 60°.

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (\sin A - \sqrt{3}\cos A) + (\sin B - \sqrt{3}\cos B) + (\sin C - \sqrt{3}\cos C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right) + \left(\frac{1}{2}\sin B - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right) + \left(\frac{1}{2}\sin C - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right) =$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-(A+B)\right)=0$$

$$\left(\text{Vì } C-\frac{\pi}{3}=\pi-(A+B)-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-(A+B)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-2\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right).(-2)\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{B}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0 \text{ hay } \sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0 \text{ hay } \sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{B}{2}\right)=0$$

i) $\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow A+B=\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow C=\frac{\pi}{3}$

ii) $\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{A}{2}=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow A=\frac{\pi}{3}$

iii) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{B}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}=\frac{B}{2} \Leftrightarrow B=\frac{\pi}{3}$.

Vậy: (*) $\Leftrightarrow$ $A=\frac{\pi}{3}$ hay $B=\frac{\pi}{3}$ hay $C=\frac{\pi}{3}$.

Điều này chứng tỏ rằng tam giác có ít nhất một góc bằng 60°.

Đề 1.78

Cho tam giác ABC thỏa: $(1+\cos B)\sqrt{4a^2-c^2}=(2a+c)\sin B$ (*)

Chứng minh rằng tam giác là cân.

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (1+\cos B)^2(4a^2-c^2)=(2a+c)^2\sin^2 B$

$\Leftrightarrow (1+\cos B)^2(2a-c)(2a+c)=(2a+c)^2(1-\cos B)(1+\cos B)$

$\Leftrightarrow (1+\cos B)[(2a-c)(1+\cos B)-(2a+c)(1-\cos B)]=0$

$\Leftrightarrow (2\sin A-\sin C)(1+\cos B)-(2\sin A+\sin C)(1-\cos B)=0$

(vì trong tam giác ABC thì $1+\cos B>0$)

$\Leftrightarrow 2\sin A+2\sin A\cos B-\sin C-\sin C\cos B-2\sin A+2\sin A\cos B$

$-\sin C+\sin C\cos B=0$

$\Leftrightarrow 4\sin A\cos B-2\sin C=0 \Leftrightarrow 2\sin A\cos B-\sin C=0$

$\Leftrightarrow \sin(A+B)+\sin(A-B)-\sin C=0$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = 0 \qquad (\text{vì } \sin(A + B) = \sin C)$$

$$\Leftrightarrow \quad A - B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B.$$

Vậy tam giác cân tại C.

Đề 1.79

Cho tam giác ABC thỏa: sin2A + sin2B = 4sinAsinB (*)

Chứng minh rằng tam giác vuông tại C.

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B = 4\sin A\sin B$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin A\cos A - \sin A\sin B) + 2(\sin B\cos B - \sin A\sin B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A\,(\cos A - \sin B) + \sin B(\cos B - \sin A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - \sin B\right] + \sin B\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - \sin A\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B - A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A + B}{2}\right) + \sin B\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A - B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A + B}{2}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A + B}{2}\right)\left[\sin A\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B - A}{2}\right) + \sin B\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A - B}{2}\right)\right] = 0$$

Xét $M = \sin A\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B - A}{2}\right) + \sin B\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A - B}{2}\right)$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\left(\cos\frac{B - A}{2} - \sin\frac{B - A}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin B\left(\cos\frac{A - B}{2} - \sin\frac{A - B}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\sin A + \sin B)\cos\frac{B - A}{2} + (\sin A - \sin B)\sin\frac{A - B}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[2\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2}\cos\frac{B - A}{2} + 2\cos\frac{A + B}{2}\sin\frac{A - B}{2}\sin\frac{A - B}{2}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\sin\frac{A + B}{2}\cos^2\frac{A - B}{2} + \cos\frac{A + B}{2}\sin^2\frac{A - B}{2}\right] > 0$$

$$\left(\text{Vì } 0 < \frac{A + B}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin\frac{A + B}{2} > 0,\ \cos\frac{A + B}{2} > 0,\ \cos\frac{A - B}{2} \neq 0\right).$$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4} - \frac{A + B}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{A + B}{2} - \frac{\pi}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A + B = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại C.

Đề 1.80

Cho tam giác ABC thỏa:

$$2(\cos^2A + \cos^2B) = (\sin^2A + \sin^2B)(\cot g^2A + \cot g^2B) \qquad (*)$$

Chứng minh tam giác cân tại A.

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 A + 1 - \sin^2 B) = (\sin^2 A + \sin^2 B)\left(\frac{1}{\sin^2 A} - 1 + \frac{1}{\sin^2 B} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(2 - \sin^2 A - \sin^2 B) = (\sin^2 A + \sin^2 B)\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} - 2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2(\sin^2 A + \sin^2 B) = -2(\sin^2 A + \sin^2 B) + (\sin^2 A + \sin^2 B)\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4 = 1 + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} + \frac{\sin^2 B}{\sin^2 A} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} + \frac{\sin^2 B}{\sin^2 A} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin A}{\sin B} - \frac{\sin B}{\sin A}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin A}{\sin B} - \frac{\sin B}{\sin A} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = \sin^2 B \quad \Leftrightarrow \quad \sin A = \sin B \quad \Leftrightarrow \quad A = B.$$

Vậy tam giác cân tại C.

Đề 1.81

Cho tam giác ABC thỏa: $\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$ (*)

Chứng minh tam giác vuông tại A.

Giải

Ta có : $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sin\frac{C}{2}\right] \qquad \left(\text{vì } \sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right] \qquad \left(\text{vì } \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

Ta lại có : $1 - \cos A + \cos B + \cos C = 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$$= 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \qquad \left(\text{vì } \cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\left[\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right] \left(\text{vì } \sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy tam giác vuông tại A.

Đề 1.82

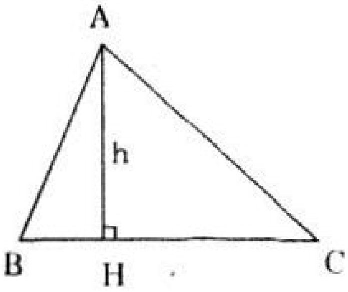
Cho tam giác ABC với đường cao AH = h. Gọi P, P_1, P_2 lần lượt là nửa chu vi của các tam giác ABC, ABH và ACH thỏa: $P^2 = P_1^2 + P_2^2$

1. Chứng tỏ: $\mathbf{P = \frac{1}{2}h\left(\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)}$,

$$\mathbf{P_1 = \frac{1}{2}h\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right), \quad P_2 = \frac{1}{2}h\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)}$$

2. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

Giải



1. Tam giác vuông AHB cho ta:

$$h = AB\sin B \Rightarrow AB = \frac{h}{\sin B}$$

$$h = BH.\operatorname{tg}B \Rightarrow BH = h\operatorname{cotg}B$$

nên $P_1 = \frac{1}{2}(AB + AH + BH) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sin B} + h + h\operatorname{cotg}B\right)$

$$= \frac{1}{2}h\left(\frac{1}{\sin B} + 1 + \frac{\cos B}{\sin B}\right) = \frac{1}{2}h\left(1 + \frac{1+\cos B}{\sin B}\right)$$

$$= \frac{1}{2}h\left(1 + \frac{2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}\right) = \frac{1}{2}h\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right).$$

Tam giác vuông AHC cho ta: $h = AC\sin C \Rightarrow AC = \frac{h}{\sin C}$

$$h = HC\operatorname{tg}C \Rightarrow HC = h\operatorname{cotg}C$$

nên $P_2 = \frac{1}{2}(AC + AH + HC) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sin C} + h + h\text{cotg}C\right)$

$$= \frac{1}{2}h\left(\frac{1}{\sin C} + 1 + \frac{\cos C}{\sin C}\right) = \frac{1}{2}h\left(\frac{1 + \cos C}{\sin C} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}h\left(\frac{2\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} + 1\right) = \frac{1}{2}h\left(\text{cotg}\frac{C}{2} + 1\right).$$

Ta lại có: $P = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{1}{2}(AB + AC + HB + HC)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sin B} + \frac{h}{\sin C} + h\text{cotg}B + h\text{cotg}C\right)$$

$$= \frac{1}{2}h\left(\frac{1}{\sin B} + \text{cotg}B + \frac{1}{\sin C} + \text{cotg}C\right)$$

$$= \frac{1}{2}h\left(\frac{1 + \cos B}{\sin B} + \frac{1 + \cos C}{\sin C}\right)$$

$$= \frac{1}{2}h\left(\frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}\right) = \frac{1}{2}h\left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right).$$

2. Theo đề bài thì $P^2 = P_1^2 + P_2^2$ nên:

$$\frac{1}{4}h^2\left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}h^2\left(1 + \text{cotg}\frac{B}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}h^2\left(1 + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2 = \left(1 + \text{cotg}\frac{B}{2}\right)^2 + \left(1 + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \text{cotg}^2\frac{B}{2} + \text{cotg}^2\frac{C}{2} + 2\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2} =$$

$$= 1 + 2\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}^2\frac{B}{2} + 1 + 2\text{cotg}\frac{C}{2} + \text{cotg}^2\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2} = 1 + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2} - 1}{\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{cotg}\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{B + C}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad B + C = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2}.$$

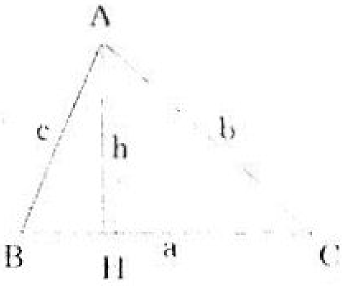
Vậy tam giác ABC vuông tại A.

Đề 1.83

Cho tam giác ABC thỏa: $b + c = \frac{1}{2}a + \sqrt{3}h$ (h: đường cao kẻ từ A)

Chứng minh tam giác là đều.

Giải



Tam giác vuông AHC cho ta: $h = AC\sin C = b\sin C$.

Đề bài cho: $b + c = \frac{1}{2}a + \sqrt{3}h$

$$\Rightarrow \quad b + c = \frac{1}{2}a + \sqrt{3}b\sin C$$

$$\Rightarrow \quad 2R\sin B + 2R\sin C = \frac{1}{2}.2R\sin A + 2R\sqrt{3}\sin B\sin C$$

$$\Rightarrow \quad \sin B + \sin C = \frac{1}{2}\sin A + \sqrt{3}\sin B\sin C$$

$$\Rightarrow \quad \sin B + \sin C = \frac{1}{2}\sin(B + C) + \sqrt{3}\sin B\sin C$$

$$\Rightarrow \quad \sin B + \sin C = \frac{1}{2}(\sin B\cos C + \sin C\cos B) + \sqrt{3}\sin B\sin C$$

$$\sin B\left(1 - \frac{1}{2}\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) + \sin C\left(1 - \frac{1}{2}\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin B.\left[1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right)\right] + \sin C.\left[1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0 \qquad (*)$$

mà $\sin B > 0,\ \sin C > 0,\ 1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0,\ 1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$

nên (*) cho ta: $\begin{cases} 1 - \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ 1 - \cos\left(B - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C - \frac{\pi}{3} = 0 \\ B - \frac{\pi}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad B = C = \frac{\pi}{3}$

Vậy tam giác ABC là đều.

Đề 1.84

Cho tam giác ABC có diện tích thỏa: $3S = 2R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$

Chứng minh rằng tam giác ABC là đều.

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{3abc}{4R} = 2R^2\left[\left(\dfrac{a}{2R}\right)^3 + \left(\dfrac{b}{2R}\right)^3 + \left(\dfrac{c}{2R}\right)^3\right] \Leftrightarrow 3abc = a^3 + b^3 + c^3$

mà theo bất đẳng thức Côsi thì: $a^3 + b^3 + c^3 \ge 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$.

Do đó (*) chứng tỏ đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức trên, nên phải có: $a^3 = b^3 = c^3 \Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy tam giác là đều.

Đề 1.85

Cho tam giác ABC thỏa: $(\sin A + \sin B)\text{cotg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{\sin^2 A}{\cos A} + \dfrac{\sin^2 B}{\cos B}$ (*)

Chứng minh tam giác là cân.

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (\sin A + \sin B)\text{cotg}\frac{C}{2} = \sin A\,\text{tg}A + \sin B\,\text{tg}B$$

$$\Leftrightarrow \sin A\left(\text{cotg}\frac{C}{2} - \text{tg}A\right) + \sin B\left(\text{cotg}\frac{C}{2} - \text{tg}B\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A.\frac{\cos\frac{C}{2}\cos A - \sin\frac{C}{2}\sin A}{\sin\frac{C}{2}.\cos A} + \frac{\sin B\left(\cos\frac{C}{2}\cos B - \sin\frac{C}{2}\sin B\right)}{\sin\frac{C}{2}.\cos B} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}A.\cos\left(\frac{C}{2} + A\right) + \cos\left(\frac{C}{2} + B\right)\text{tg}B = 0$$

Mà $\left(\dfrac{C}{2} + A\right) + \left(\dfrac{C}{2} + B\right) = C + A + B = \pi$ nên: $\cos\left(\dfrac{C}{2} + B\right) = -\cos\left(\dfrac{C}{2} + A\right)$

Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{C}{2} + A\right)[\text{tg}A - \text{tg}B] = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{C}{2} + A\right) = 0 \text{ hay } \text{tg}A - \text{tg}B = 0$$

- Với $\cos\left(\dfrac{C}{2} + A\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{C}{2} + A = \dfrac{\pi}{2}$, thì có $\dfrac{C}{2} + B = \dfrac{\pi}{2}$ nên: $A = B$.
- Với $\text{tg}A - \text{tg}B = 0 \Leftrightarrow \text{tg}A = \text{tg}B \Leftrightarrow A = B$.

Vậy tam giác ABC cân tại C.

§6. GIẢI TAM GIÁC

Đề 1.86

Cho tam giác ABC thỏa $A = 2B$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Tính a, c theo b và B.

Giải

Ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

nên: $a = \dfrac{b\sin A}{\sin B} = \dfrac{b\sin 2B}{\sin B}$ (vì A = 2B)

$\Rightarrow$ a = 2bcosB (vì sin2B = 2sinB cosB).

Ta có: $c = \dfrac{b\sin C}{\sin B} = \dfrac{b\sin(A+B)}{\sin B}$ (vì sinC = sin (A+B)).

$\Rightarrow$ $c = \dfrac{b\sin 3B}{\sin B}$ (vì A = 2B)

$\Rightarrow$ $c = \dfrac{b(3\sin B - 4\sin^3 B)}{\sin B} = b(3 - 4\sin^2 B)$.

Vậy: a = 2bcosB, $c = b(3 - 4\sin^2 B)$.

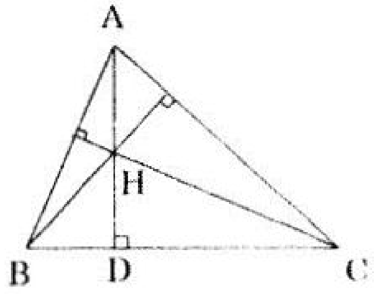
Đề 1.87

Cho tam giác ABC với đường cao AD và trực tâm H là trung điểm của AD.

1. Chứng minh rằng: tgB.tgC = 2.

2. Cho trước A, hãy tìm B và C. Biện luận.

Giải



1. Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{DHC}$ (góc có cạnh vuông góc)

Trong tam giác vuông DHC, ta có:

$$\text{tg}\,\widehat{DHC} = \frac{DC}{DH} \Rightarrow \text{tg}B = \frac{DC}{DH}.$$

Trong tam giác vuông DAC, ta có: $\text{tg}C = \dfrac{AD}{CD}$

Do đó: $\text{tgB.tgC} = \dfrac{DC}{DH}.\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AD}{DH} = 2$ (vì HA = HD).

Vậy ta đã chứng minh rằng: tgB.tgC = 2.

2. Ta có: $\begin{cases} B + C = \pi - A & (1) \\ \text{tgBtgC} = 2 & (2) \end{cases}$

(1) cho ta: $\text{tg}(B + C) = -\text{tg}A \Leftrightarrow \dfrac{\text{tgB} + \text{tgC}}{1 - \text{tgBtgC}} = -\text{tgA}$

$\Leftrightarrow$ tgB + tgC = tgA (do tgBtgC = 2).

Với tgB + tgC = tgA và tgBtgC = 2 thì tgB, tgC là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - X\text{tg}A + 2 = 0 \quad (*)$$

$\Delta = tg^2A - 8$

$\Delta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad tgA \leq -2\sqrt{2} \quad$ hay $\quad tgA \geq 2\sqrt{2}$

- Nếu $tgA \leq -2\sqrt{2}$:

  Ta có $tgB + tgC < 0$, $tgB.tgC > 0$ nên $tgB < 0$, $tgC < 0$.

  Điều này là vô lí vì không thể xảy ra có tới 2 góc tù trong tam giác.

- Nếu $tgA \geq 2\sqrt{2}$:

  (*) cho ta $X_{1,2} = \frac{1}{2}\left(tgA \pm \sqrt{tg^2A - 8}\right)$ $(X_1 > 0,\ X_2 > 0)$ và ta có:

$$tgB = \frac{1}{2}\left(tgA + \sqrt{tg^2A - 8}\right), \qquad tgC = \frac{1}{2}\left(tgA - \sqrt{tg^2A - 8}\right)$$

hay
$$tgB = \frac{1}{2}\left(tgA - \sqrt{tg^2A - 8}\right), \qquad tgC = \frac{1}{2}\left(tgA + \sqrt{tg^2A - 8}\right).$$

Đề 1.88

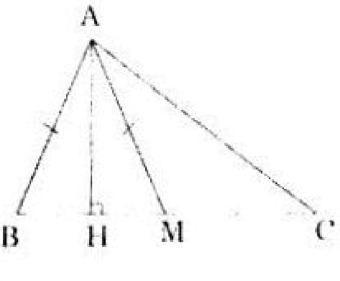
Cho tam giác ABC với trung tuyến AM thỏa AM = AB.

1. Chứng minh: $tgB = 3tgC$ và $\sin A = 2\sin(B - C)$

2. Cho A biết trước, tìm các góc B và C.

Giải

1. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Vì AB = AM nên tam giác BAM cân tại H, suy ra $BH = MH = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{4}BC$.



Tam giác vuông ABH cho ta $\quad tgB = \frac{AH}{BH}$.

Tam giác vuông ACH cho ta: $\quad tgC = \frac{AH}{CH}$.

Do đó: $$\frac{tgB}{tgC} = \frac{AH}{BH}.\frac{CH}{AH} = \frac{CH}{BH} = 3 \left(\text{vì } BH = \frac{1}{4}BC\right).$$

Vậy ta có: $tgB = 3tgC$.

Trong tam giác AMC, ta có: $$\frac{AC}{\sin\widehat{AMC}} = \frac{MC}{\sin\widehat{MAC}} \qquad (1)$$

với $\widehat{AMC} = \pi - \widehat{AMB} = \pi - B$ $\quad$ (ΔABM cân tại A nên $B = \widehat{AMB}$)

$\Rightarrow \quad \sin\widehat{AMC} = \sin(\pi - B) = \sin B$.

Cũng với tam giác AMC thì: $\quad \widehat{AMB} = \widehat{MAC} + \widehat{MCA} = \widehat{MAC} + C$

$\Rightarrow \quad \widehat{MAC} = \widehat{AMB} - C = B - C$.

Do đó (1) cho ta: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{MC}{\sin(B - C)}$.

Tam giác ABC lại cho: $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{BC}{\sin A}$

nên ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{MC}{\sin(B - C)} = \dfrac{BC}{2\sin(B - C)}$ $\left(\text{vì } MC = \dfrac{1}{2}BC\right)$.

Suy ra: $\sin A = 2\sin(B - C)$.

2. Từ câu 1, ta có: $\begin{cases} \text{tg}B = 3\text{tg}C & (2) \\ B + C = \pi - A & (3) \end{cases}$

(3) cho ta: $\text{tg}(B + C) = -\text{tg}A \Rightarrow \dfrac{\text{tg}B + \text{tg}C}{1 - \text{tg}B\text{tg}C} = -\text{tg}A$

$\Rightarrow \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C - \text{tg}A$

$\Rightarrow 4\text{tg}C = 3\text{tg}A\text{tg}^2C - \text{tg}A$ (do (2))

$\Rightarrow 3\text{tg}A.\text{tg}^2C - 4\text{tg}C - \text{tg}A = 0$

(đây là phương trình bậc hai theo tgC)

$\Rightarrow 3\text{tg}A \,.\, t^2 - 4t - \text{tg}A = 0$ (với $t = \text{tg}C$).

Ta có: $t_1t_2 = -\dfrac{1}{3}$ nên có $t_1 < 0 < t_2$.

Hơn nữa $\text{tg}B = 3\text{tg}C$ nên phải có $\text{tg}C > 0$ (vì trong tam giác không thể có $\text{tg}C < 0$ và $\text{tg}B < 0$).

Do đó: $\text{tg}C = \dfrac{1}{3\text{tg}A}\left(2 + \sqrt{4 + 3\text{tg}^2A}\right)$, $\text{tg}B = \dfrac{1}{\text{tg}A}\left(2 + \sqrt{4 + 3\text{tg}^2A}\right)$

(với điều kiện $\text{tg}A > 0$).

Nhận xét: Nếu $\text{tg}A < 0$ thì:

$\text{tg}C = \dfrac{1}{3\text{tg}A}\left(2 - \sqrt{4 + 3\text{tg}^2A}\right)$, $\text{tg}B = \dfrac{1}{\text{tg}A}\left(2 - \sqrt{4 + 3\text{tg}^2A}\right)$.

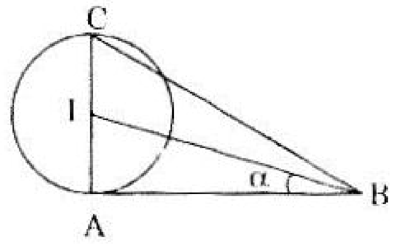
Đề 1.89

Cho đoạn thẳng AB cố định. Đường tròn di động tâm I tiếp xúc với AB tại A với C là điểm xuyên tâm của A. Đặt $\widehat{ABI} = \alpha$ và $\widehat{IBC} = \beta$.

1. Lập hệ thức giữa tgα và tgβ.

2. Tìm α để tgβ có giá trị lớn nhất.

Giải



1. Tam giác vuông ABI cho ta: $\text{tg}\alpha = \dfrac{IA}{AB}$.

Tam giác vuông ABC cho ta: $\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{AC}{AB}$

mà $AC = 2IA$ nên: $\text{tg}(\alpha + \beta) = 2\text{tg}\alpha \Rightarrow \text{tg}\alpha + \text{tg}\beta = 2\text{tg}\alpha(1 - \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta$

2. Từ câu 1, suy ra: $\operatorname{tg}\beta(1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha}$

Với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Theo bất đẳng thức Côsi, thì:

$$1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha \geq 2\sqrt{2\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$$

nên: $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha} \leq \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Do đó $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ (đạt giá trị lớn nhất) khi dấu "=" xảy ra trong bất đẳng thức, lúc đó: $1 = 2\operatorname{tg}^2\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\operatorname{tg}\beta$ lớn nhất khi $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Đề 1.90

Cho tam giác vuông cân ABC có AB = AC = a ; kéo dài cạnh AC một đoạn CM với $\widehat{CBM} = \alpha$

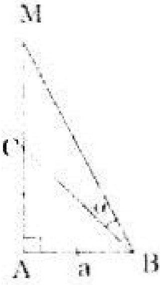
1. Tính AM, CM theo a và α.

2. Tính $\operatorname{tg}\alpha$ để cho CM = BC. Suy ra cách tính $\cos\dfrac{\pi}{8}$ và $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

Giải

1. Ta có: $\widehat{ABM} = \widehat{ABC} + \widehat{CBM} = \dfrac{\pi}{4} + \alpha$

Tam giác vuông BAM cho ta: $AM = AB.\operatorname{tg}\widehat{ABM} = a\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$.



Ta có: $CM = AM - AC = a\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - a$

$$= a\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 1\right] = a\left(\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - 1\right) = \frac{2a\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}.$$

Vậy: $AM = a\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$. $\quad CM = \dfrac{2a\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$.

2. Tam giác ABC vuông cân tại A nên $BC = a\sqrt{2}$.

Ta lại có: $CM = CB = a\sqrt{2}$ nên theo câu 1 thì: $\dfrac{2a\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = a\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{2})\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$$

Với tam giác cân BCM, ta có:

$$\widehat{BMC} = \alpha = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{BCM}) = \frac{1}{2}\widehat{BCA} = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Từ kết quả $tg\alpha = \sqrt{2} - 1$, ta suy ra $tg\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ và:

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 + tg^2\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Vậy: $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ và $\sin\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}.tg\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

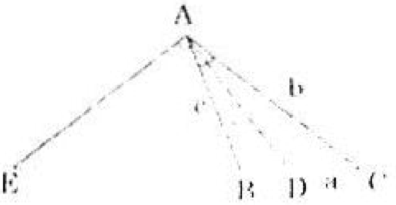
Đề 1.91

Cho tam giác ABC với BC = a, AC = b, AB = c (với b > c). Gọi AD, AE lần lượt là phân giác trong và ngoài của góc A.

1. Tính AD, AE theo b, c và A.

2. Cho AD = AE. Chứng minh rằng: $B - C = \frac{\pi}{2}$.

Giải



1. Đặt AD = x, AE = y

Tam giác ABC có diện tích là: $S = \frac{1}{2}bc\sin A$

Tam giác BAD có diện tích là: $S_1 = \frac{1}{2}AB.AD\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}cx\sin\frac{A}{2}$

Tam giác DAC có diện tích là: $S_2 = \frac{1}{2}AD.AC\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}bx\sin\frac{A}{2}$.

Ta có: $S = S_1 + S_2 \Leftrightarrow bc\sin A = cx\sin\frac{A}{2} + bx\sin\frac{A}{2}$

$\Leftrightarrow 2bc\cos\frac{A}{2} = x(c + b)$ (vì $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$)

$\Leftrightarrow x = \frac{2bc}{b + c}.\cos\frac{A}{2}$.

Tam giác AEC có diện tích là: $S_3 = \frac{1}{2}AE.AC\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}yb\cos\frac{A}{2}$

Tam giác BAE có diện tích là: $S_4 = \frac{1}{2}AE.AB\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}yc\cos\frac{A}{2}$

Ta có: $S = S_3 - S_4 \Leftrightarrow bc\sin A = yb\cos\frac{A}{2} - yc\cos\frac{A}{2}$

$\Leftrightarrow 2bc\sin\frac{A}{2} = y(b - c) \Leftrightarrow y = \frac{2bc}{b - c}\sin\frac{A}{2}$.

Vậy: $\quad AD = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2} \quad$ và $\quad AE = \dfrac{2bc}{b-c}\sin\dfrac{A}{2}$.

2. Với AD = AE thì ta có: $\quad \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{2bc}{b-c}\sin\dfrac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow (b-c)\cos\frac{A}{2} = (b+c)\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\sin B - \sin C)\cos\frac{A}{2} = (\sin B + \sin C)\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\frac{A}{2} = 2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) = \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}\left(\frac{B-C}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B-C}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad B - C = \frac{\pi}{2}.$$

Đề 1.92

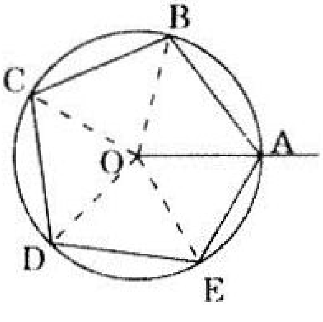
Cho ngũ giác đều ABCDE nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R = 1.

1. Chứng minh: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$

2. Suy ra rằng: $1 + 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5}\right) = 0,\ 1 + 4\cos\dfrac{2\pi}{5}.\cos\dfrac{4\pi}{5} = 0$

3. Từ câu 2 suy ra cách tính $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

Giải



1. Vectơ $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OA.

Vectơ $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ có giá là đường thẳng OA (do tính chất ngũ giác đều) nên $\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ có giá là đường thẳng OA.

Mặt khác: $\overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$ có giá là đường thẳng OB.

Do đó phải có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0} \quad (*)$

2. ABCDE là ngũ giác đều nên: $\quad \widehat{AOB} = \widehat{AOE} = \dfrac{2\pi}{5}; \quad \widehat{AOC} = \widehat{AOD} = \dfrac{4\pi}{5}$.

Từ (*), ta dùng phép chiếu lên trục OA (theo chiều $\overrightarrow{OA}$) thì có:

$$1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}\right) = 0. \qquad (1)$$

Từ (1), ta có: $1 + 2.2\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 4\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + 4\left(-\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(-\cos\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + 4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} = 0. \qquad (2)$$

3. Ta có: $(1) \Leftrightarrow \quad \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}; \qquad (2) \Leftrightarrow \quad \cos\frac{2\pi}{5}.\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{4}$

Do đó $\cos\frac{2\pi}{5}$ và $\cos\frac{4\pi}{5}$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_1 = -\frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right), \quad X_2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Hơn nữa ta biết rằng: $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$ nên: $\cos\frac{4\pi}{5} < 0 < \cos\frac{2\pi}{5}$.

Vậy: $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

Đề 1.93

Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c.

1. Tìm hệ thức về a, b, c sao cho B = 3C. Với C cho trước, hãy tìm giới hạn thay đổi của b.

2. Cho trước a và cho B = 3C. Tìm các góc của tam giác sao cho: b + c = m (m là độ dài đã cho).

Giải

1. Ta có: $A = \pi - (B + C) = \pi - (3C + C) = \pi - 4C$ (do $B = 3C$).

Trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin 4c} = \frac{b}{\sin 3c} = \frac{c}{\sin c} \quad (\text{vì } \sin A = \sin(\pi - 4c) = \sin 4c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 4c} = \frac{b}{\sin 3c} = \frac{c}{\sin c} = \frac{b + c}{\sin 3c + \sin c} = \frac{b - c}{\sin 3c - \sin c} \qquad (*)$$

(do tính chất của tỉ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$)

Từ (*) ta có:

$$\frac{a}{\sin 4c} = \frac{b+c}{\sin 3c + \sin c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{2\sin 2c\cos 2c} = \frac{b+c}{2\sin 2c\cos c}$$

$$\Leftrightarrow \quad a\cos c = (b+c)\cos 2c \quad \Leftrightarrow \quad a\cos c = (b+c)(2\cos^2 c - 1) \qquad (1)$$

Từ (*), ta còn có:

$$\frac{a}{\sin 4c} = \frac{b-c}{\sin 3c - \sin c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{2\sin 2c\cos 2c} = \frac{b-c}{2\cos 2c\sin c}$$

$$\Leftrightarrow \quad a\sin c = (b-c)\sin 2c \quad \Leftrightarrow \quad a = 2(b-c)\cos c \quad \Leftrightarrow \quad \cos c = \frac{a}{2(b-c)}$$

Thế $\cos c = \frac{a}{2(b-c)}$ vô (1), ta được: $\frac{a^2}{2(b-c)} = (b+c)\left[2.\frac{a^2}{4(b-c)^2} - 1\right]$

$\Leftrightarrow \quad a^2(b-c) = (b+c)(a^2 - 2(b-c)^2)$

$\Leftrightarrow \quad a^2b - a^2c = a^2b + a^2c - 2(b+c)(b-c)^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2c = (b+c)(b-c)^2$. Đây là hệ thức cần tìm.

Giới hạn thay đổi của b:

Ta có: $\frac{b}{\sin 3c} = \frac{c}{\sin c} \quad \Rightarrow \quad b = c.\frac{\sin 3c}{\sin c} = c.\frac{3\sin c - 4\sin^3 c}{\sin c}$

nên: $b = c(3 - 4\sin^2 c)$

Ta lại có: $A = \pi - 4c > 0 \Rightarrow 0 < c < \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow 0 < \sin c < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 < \sin^2 c < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1 < 3 - 4\sin^2 c < 3.$

Do đó: $c < b < 3c$.

2. Ta có: $B = 3C$ và $A = \pi - 4C$ nên chỉ cần tìm góc C là xong.

Theo (1) thì: $a\cos C = (b+c)(2\cos^2 C - 1)$

$a\cos C = m(2\cos^2 C - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 2m\cos^2 C - a\cos C - m = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2mx^2 - ax - m = 0$ (với $x = \cos C$, thì $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$)

$\Delta = a^2 + 8m^2 > 0$ (với mọi m)

$2mf(1) = 2m(m-a) > 0$ (vì $m > 0$, $b + c = m > a$)

$2mf\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2m\left(-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0.$

Do đó ta có: $x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < x_2 < 1$.

Vì $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$ nên chỉ nhận: $\cos C = x_2 = \frac{1}{4m}\left(a + \sqrt{a^2 + 8m^2}\right)$.

Chương II

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương trình lượng giác cơ bản
2. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx
3. Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với sinx và cosx
4. Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx
5. Phương trình lượng giác và các phép giải
6. Một số phương trình lượng giác không mẫu mực
7. Phương trình lượng giác có chứa căn thức và giá trị tuyệt đối
8. Phương trình lượng giác có chứa hàm mũ và lôgarit
9. Phương trình lượng giác tương đương.

§1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình: $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + k2\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$)

$\cos x = m \Leftrightarrow x = \pm \arccos m + k2\pi$ (với $|m| \le 1$)

Đặc biệt: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

2. Phương trình: $\sin x = \sin a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a + k2\pi \\ x = \pi - a + k2\pi \end{array}\right.$

$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right.$ (với $|m| \le 1$)

Đặc biệt: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

3. Phương trình: $\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}a \Leftrightarrow x = a + k\pi$

$\mathrm{tg}x = m \Leftrightarrow x = \mathrm{arctg}m + k\pi$ (với $m \in \mathbb{R}$)

4. Phương trình:

$\mathrm{cotg}x = \mathrm{cotg}a \Leftrightarrow x = a + k\pi$

$\mathrm{cotg}x = m \Leftrightarrow x = \mathrm{arccotg}m + k\pi$ (với $m \in \mathbb{R}$)

Đề 2.1

Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $3\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -\frac{1}{2}$

e) $3\mathrm{tg}^2 3x = 1$

g) $\cos^2 x - 3\cos 2x - 4 = 0.$

Giải

a) $$\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$$

b) $$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + k\pi \text{ hay } x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi.$$

c) $$3\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}.$$

d) $$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \text{ hay } x = -\frac{5\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}.$$

e) $$3\mathrm{tg}^2 3x = 1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 3x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \mathrm{tg}3x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \mathrm{tg}3x = \mathrm{tg}\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}.$$

g) $$\cos^2 x - 3\cos 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3\cos 2x - 4 = 0$$

$\Leftrightarrow -5\cos 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{7}{5}$: phương trình vô nghiệm.

Đề 2.2

Giải các phương trình sau:

a) $\mathrm{tgx} + \mathrm{cotgx} = -\dfrac{2}{\sin x}$ b) $\sin 2x + \sin x = 0$

c) $5\sin^2 x + 2\cos 2x - 2 = 0$ d) $\sin\dfrac{x}{2} = 1 - \cos x.$

Giải

a) Điều kiện: $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

Ta có: $\mathrm{tgx} + \mathrm{cotgx} = -\dfrac{2}{\sin x} \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = -\dfrac{2}{\sin x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x \sin x} = -\dfrac{2}{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi.$

b) Ta có: $\sin 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hay $\cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = k\pi$ hay $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi.$

c) $5\sin^2 x + 2\cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}(1 - \cos 2x) + 2\cos 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow -\cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 = \cos k2\pi$

$\Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi.$

d) $\sin\dfrac{x}{2} = 1 - \cos x \Leftrightarrow \sin\dfrac{x}{2} = 2\sin^2\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow \sin\dfrac{x}{2}\left(1 - 2\sin\dfrac{x}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{x}{2} = 0$ hay $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi \quad \text{hay} \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = k2\pi$ hay $x = \dfrac{\pi}{3} + k4\pi$ hay $x = \dfrac{5\pi}{3} + k4\pi.$

Đề 2.3

Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2 = 0$ b) $1 - (2 + \sqrt{2})\sin x = \dfrac{2\sqrt{2}}{1 + \mathrm{cotg}^2 x}$

c) $\mathbf{2tgx = 1 - tg^2x}$ d) $\mathbf{tg^2x = \dfrac{1 - \cos x}{1 - \sin x}}$

e) $\mathbf{\cos^2\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos^2 2x - 3\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) + 2 = 0}$.

Giải

a) $2\sin^2x - \cos^2x - 4\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2x - (1 - \sin^2x) - 4\sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin^2x - 4\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1, \quad \sin x = \dfrac{1}{3}$

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

Với $\sin x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \arcsin\dfrac{1}{3} + k2\pi$ hay $x = \pi - \arcsin\dfrac{1}{3} + k2\pi$.

b) $1 - (2 + \sqrt{2})\sin x = \dfrac{-2\sqrt{2}}{1 + \cot g^2x} \Leftrightarrow 1 - (2 + \sqrt{2})\sin x = -2\sqrt{2}\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^2 x - (2 + \sqrt{2})\sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}t^2 - (2 + \sqrt{2})t + 1 = 0$ (với $t = \sin x$)

$\Delta = (2 + \sqrt{2})^2 - 8\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^2$

$t_1 = \dfrac{2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $t_2 = \dfrac{2 + \sqrt{2} - (2 - \sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

Với $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ hay $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$

Với $t = \dfrac{1}{2}$; $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

c) $2tgx = 1 - tg^2x \Leftrightarrow tg^2x + 2tgx - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$ (với $t = tgx$) $\Leftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$

Với $t = -1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow tgx = -1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{2}) + k2\pi$.

d) Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$tg^2x = \dfrac{1 - \cos x}{1 - \sin x} \Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \dfrac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \sin x} = 1 - \cos x$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)[(1 + \cos x) - (1 + \sin x)] = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \cos x = 0$ hay $\cos x - \sin x = 0$

Với $1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

Với $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Kết luận: $x = k2\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

e) $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2 2x - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (-\sin 2x)^2 - \cos^2 2x - 3\sin 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x - (1 - \sin^2 2x) - 3\sin 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 3\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$ (với $t = \sin 2x$)

$\Leftrightarrow t = 1,\ t = \frac{1}{2}$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Với $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$

Đề 2.4

Giải và biện luận theo tham số m các phương trình:

a) $m\cos x - 2(m - 1) = (2m + 3)\cos x - 1$

b) $3\operatorname{tg}x - m = (m + 2)\operatorname{tg}x$ c) $(4m - 1)\sin x + 5 = m\sin x - 3$.

Giải

a) $m\cos x - 2(m - 1) = (2m + 3)\cos x - 1 \Leftrightarrow (m + 3)\cos x = -2m + 3 \quad (*)$

Nếu $m = -3$: phương trình vô nghiệm.

Nếu $m \neq -3$: $(*) \Leftrightarrow \cos x = \frac{-2m + 3}{m + 3}$

Phương trình có nghiệm khi:

$$-1 \le \frac{-2m + 3}{m + 3} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2m + 3}{m + 3} + 1 \ge 0 \\ \frac{-2m + 3}{m + 3} - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-m + 6}{m + 3} \ge 0 \\ \frac{-3m}{m + 3} \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m \le 6 \\ m < -3 \vee m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le 6.$$

Vậy: Nếu $0 \le m \le 6$: $(*) \Leftrightarrow \cos x = \frac{3 - 2m}{m + 3} \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(\frac{3 - 2m}{m + 3}\right) + k2\pi$

Nếu $m < 0 \vee m > 6$: phương trình vô nghiệm.

b) Ta có: $3\text{tgx} - m = (m + 2)\text{tgx} \Leftrightarrow (1 - m)\text{tgx} = m$

Nếu $m = 1$: phương trình vô nghiệm.

Nếu $m \neq 1$: $\text{tgx} = \dfrac{m}{1 - m} \Leftrightarrow x = \text{arctg}\left(\dfrac{m}{1 - m}\right) + k\pi$.

c) $(4m - 1)\sin x + 5 = m\sin x - 3 \Leftrightarrow (3m - 1)\sin x = -8$

Nếu $m = \dfrac{1}{3}$: phương trình vô nghiệm

Nếu $m \neq \dfrac{1}{3}$: $\sin x = \dfrac{-8}{3m - 1}$

Phương trình có nghiệm khi: $-1 \leq -\dfrac{8}{3m - 1} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{3m-1} - 1 \leq 0 \\ \dfrac{8}{3m-1} + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3m+9}{3m-1} \leq 0 \\ \dfrac{3m+7}{3m-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{3} \vee m \geq 3 \\ m \leq -\dfrac{7}{3} \vee m > \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{3} \vee m \geq 3$$

Do đó, ta có: $m \leq -\dfrac{7}{3} \vee m \geq 3$:

$$\sin x = \frac{-8}{3m - 1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(\dfrac{-8}{3m-1}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\dfrac{-8}{3m-1}\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

Nếu $-\dfrac{7}{3} < m < 3$: phương trình vô nghiệm.

Đề 2.5

Giải các phương trình sau:

a) $\mathbf{tgx.tg2x = 1}$ **b)** $\mathbf{\sin(6x + 60^o) = \cos 2x}$.

Giải

a) Điều kiện là: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$

Ta có: $\text{tgx.tg2x} = 1 \Leftrightarrow \text{tg2x} = \text{cotgx} \Leftrightarrow \text{tg2x} = \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$$

Biểu diễn $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ trên đường tròn lượng giác bởi 6 đầu cung như sau:

$$x_0 = \frac{\pi}{6},\ x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{5\pi}{6},\ x_3 = \frac{7\pi}{6},\ x_4 = \frac{3\pi}{2},\ x_5 = \frac{11\pi}{6}$$

Còn điều kiện là trừ các đầu cung như sau: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$

Do đó các đầu cung $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ bị loại.

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \quad \text{với} \begin{cases} k \neq 1 + 6m \\ k \neq 4 + 6n \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}).$$

b) Ta có: $\sin(6x + 60^\circ) = \cos 2x \Leftrightarrow \sin(6x + 60^\circ) = \sin(90^\circ - 2x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x + 60^\circ = 90^\circ - 2x + k.360^\circ \\ 6x + 60^\circ = 180^\circ - (90^\circ - 2x) + k.360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \left(\frac{15}{4}\right)^\circ + k.45^\circ \\ x = \left(\frac{15}{2}\right)^\circ + k.90^\circ \end{array}\right.$$

Đề 2.6

Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \cos\frac{1}{2}$ **b)** $\sin(\pi\cos x) = 1$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x)\right) = 1$ **d)** $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{cotg}(\pi \operatorname{cotg} x)$.

Giải

a) $\sin x = \cos\frac{1}{x} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi$

i) Với $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi$ thì: $\frac{1}{x} + x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right)x + 1 = 0$

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right)^2 - 4 \quad (\Delta \geq 0 \text{ khi } k \neq 0)$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + k2\pi \pm \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right)^2 - 4}\right]$$

ii) Với $\frac{1}{x} = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi$ thì: $x^2 + \left(k2\pi - \frac{\pi}{2}\right)x - 1 = 0$

$$\Delta = \left(k2\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 4 > 0 \text{ (với mọi k)}$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - k2\pi \pm \sqrt{\left(k2\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 4}\right].$$

b) Ta có: $\sin(\pi\cos x) = 1 \Leftrightarrow \pi\cos x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} + 2k \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z})$$

Vì $-1 \le \cos x \le 1$ nên $-1 \le \frac{1}{2} + 2k \le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le k \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = 0$

Do đó phương trình trở thành: $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

c) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x)\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 + 4k \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 4k$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 4k)$$

Vì $-1 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$ nên:

$$-\sqrt{2} \le 1 + 4k \le \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-\sqrt{2} - 1) \le k \le \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow k = 0$$

Do đó phương trình trở thành:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

d) $\text{tg}(\pi\text{tg}x) = \text{cotg}(\pi\text{cotg}x) \Leftrightarrow \text{tg}(\pi\text{tg}x) = \text{tg}\left[\frac{\pi}{2} - \pi\text{cotg}x\right]$

$$\Leftrightarrow \pi\text{tg}x = \frac{\pi}{2} - \pi\text{cotg}x + k\pi \Leftrightarrow \text{tg}x + \text{cotg}x = \frac{1}{2} + k$$

$$\Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{1}{2} + k \text{ (với } t = \text{tg}x) \Leftrightarrow t^2 - \left(\frac{1}{2} + k\right)t + 1 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{2} + k\right)^2 - 4 = \left(k + \frac{5}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow k \le -\frac{5}{2} \vee k \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow k \le -3 \vee k \ge 2$$

$$t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + k \pm \sqrt{\left(k + \frac{5}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \text{arctg}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + k \pm \sqrt{\left(k + \frac{5}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right)}\right] + k\pi \quad (\text{với } k \le -3 \vee k \ge 2).$$

Đề 2.7

Tìm các nghiệm $x \in (0; 2\pi)$ của phương trình: $\sin(3x - 4) = \sin(x - 2)$.

Giải

Ta có: $\sin(3x - 4) = \sin(x - 2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 4 = x - 2 + k2\pi \\ 3x - 4 = \pi - (x - 2) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Với $0 < x < 2\pi$ thì $x = 1 + k\pi$ thỏa với $k = 0$, $k = 1$ nên gồm có:

$$x = 1, \quad x = 1 + \pi$$

còn $x = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} + k\frac{\pi}{2}$ thỏa với $k = -1$, $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$

nên gồm: $x = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{2} + \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{3}{2} + \frac{5\pi}{4}$

Kết luận: $x = 1$, $x = 1 + \pi$, $x = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3}{2} + \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{3}{2} + \frac{5\pi}{4}$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI sinx VÀ cosx

acosx + bsinx = c

1. Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \ge c^2$

2. Các phép giải:

- *Cách giải 1:* Dùng $\text{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ (hoặc $\text{tg}\varphi = \frac{a}{b}$) để đưa về phương trình dạng cơ bản như sau:

$$a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \cos x + \frac{b}{a}\sin x = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin x = \frac{c}{a} \quad (\text{với } \text{tg}\varphi = \frac{b}{a})$$

$$\Leftrightarrow \cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

- *Cách giải 2:* Chia hai vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$ để đưa phương trình về dạng cơ bản như sau:

$$a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(với $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

$$\Leftrightarrow \cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- *Cách giải 3:* Dùng ẩn số phụ $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (với điều kiện $\cos\frac{x}{2} \neq 0$)

$$a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow a.\frac{1-t^2}{1+t^2} + b\frac{2t}{1+t^2} = c$$

$$\Leftrightarrow (a+c)t^2 - 2bt + c - a = 0$$

(*Lưu ý:* Cần xét bổ sung khi $\cos\frac{x}{2} = 0$)

Đề 2.8

Giải các phương trình sau:

a) $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}$

c) $5\cos 2x - 12\sin 2x = 13$

d) $2\sin x - 5\cos x = 4.$

Giải

a) $$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \quad \text{hay} \quad x = \frac{\pi}{12} + k2\pi.$$

b) $$\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \quad \text{hay} \quad x = -\frac{\pi}{24} + k\pi.$$

c) $5\cos 2x - 12\sin 2x = 13 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{13}\cos 2x - \frac{12}{13}\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi\cos 2x - \sin\varphi\sin 2x = 1$ (với $\cos\varphi = \frac{5}{13}, \sin\varphi = \frac{12}{13}$)

$\Leftrightarrow \quad \cos(2x + \varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + \varphi = k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\varphi}{2} + k\pi.$

d) $2\sin x - 5\cos x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{29}}\sin x - \frac{5}{\sqrt{29}}\cos x = \frac{4}{\sqrt{29}}$

$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi \sin x - \sin\varphi \cos x = \frac{4}{\sqrt{29}} \quad \left(\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{29}}, \sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(x - \varphi) = \frac{4}{\sqrt{29}} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - \varphi = \arcsin\frac{4}{\sqrt{29}} + k2\pi \\ x - \varphi = \pi - \arcsin\frac{4}{\sqrt{29}} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \arccos\frac{2}{\sqrt{29}} + \arcsin\frac{4}{\sqrt{29}} + k2\pi \\ x = \pi + \arccos\frac{2}{\sqrt{29}} - \arcsin\frac{4}{\sqrt{29}} + k2\pi \end{array}\right.$$

Đề 2.9

Giải các phương trình sau:

a) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos 2x$

b) $2\sin 4x + 3\cos 2x + 16\sin^3 x\cos x - 5 = 0.$

Giải

a) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \pm\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ hay $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}.$

b) Ta có: $\sin 4x = 2\sin 2x.\cos 2x = 4\sin x\cos x(1 - 2\sin^2 x) = 2\sin 2x - 8\cos x\sin^3 x$

nên: $2\sin 4x + 3\cos 2x + 16\sin^3 x\cos x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\sin 2x - 16\cos x\sin^3 x + 3\cos 2x + 16\sin^3 x\cos x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\sin 2x + 3\cos 2x = 5$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}\sin 2x + \frac{3}{5}\cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\varphi\sin 2x + \cos\varphi\cos 2x = 1 \quad \left(\text{với } \cos\varphi = \frac{3}{5},\ \sin\varphi = \frac{4}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(2x - \varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - \varphi = k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\varphi}{2} + k\pi$$

Vậy: $x = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{5} + k\pi$.

Đề 2.10

Chứng minh phương trình: $\sin x - 2\sin 2x - \sin 3x = 2\sqrt{2}$ là vô nghiệm.

Giải

Ta có: $\sin x - 2\sin 2x - \sin 3x = 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\sin x - \sin 3x) - 2\sin 2x = 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 2x \sin(-x) - 2\sin 2x = 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x.\cos 2x + \sin 2x = -\sqrt{2}$$

Ta xem đây như là phương trình dạng $a\cos 2x + b\sin 2x = c$ với $a = \sin x$, $b = 1$, $c = -\sqrt{2}$ nên phương trình có nghiệm thì:

$$\sin^2 x + 1 \geq \left(-\sqrt{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = 1 \quad (\text{vì } \sin^2 x \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x = \pm 1 \text{ và } \cos x = 0$$

Thế vào phương trình thì không thỏa (vì $\cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$, $\cos 2x = \pm 1$)

Vậy phương trình vô nghiệm.

Đề 2.11

Giải và biện luận theo tham số m phương trình:

$$(m - 1)\sin x + (m + 1)\cos x = m.$$

Giải

Với ẩn số phụ $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ thì phương trình trở thành:

$$(m - 1).\frac{2t}{1 + t^2} + (m + 1)\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = m$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(m - 1)t + (m + 1)(1 - t^2) = m(1 + t^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2m + 1)t^2 - 2(m - 1)t - 1 = 0 \qquad (*)$$

- Nếu $m = -\dfrac{1}{2}$: $(*) \Leftrightarrow \quad -3t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + k2\pi$$

- Nếu $m \neq -\dfrac{1}{2}$: $\Delta' = (m - 1)^2 + 2m + 1 = m^2 + 2 > 0$

$$t_{1,2} = \frac{1}{2m+1}\left(m - 1 \pm \sqrt{m^2 + 2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2\text{arctg}\left(\frac{m - 1 \pm \sqrt{m^2 + 2}}{2m - 1}\right) + k2\pi .$$

- Xét $\cos\frac{x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + k2\pi$

thì có $\cos x = -1$, $\sin x = 0$

Thế vào phương trình, ta có: $-(m + 1) = m \quad \Leftrightarrow \quad m = -\frac{1}{2}$

Do đó khi $m = -\frac{1}{2}$ phương trình nhận thêm nghiệm $x = \pi + k2\pi$.

Đề 2.12

Cho $a^2 + b^2 > 0$ và $c \in R$. Chứng minh rằng:

$a\cos x + b\sin x = c$ có nghiệm hay $a\,\text{cotg}x + b\,\text{tg}x = c\sqrt{2}$ có nghiệm.

Giải

- Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, ta có: $a\cos x + b\sin x = c$ có nghiệm
- Nếu $a^2 + b^2 < c^2$, thì ta có:

$$a\,\text{cotg}\,x + b\,\text{tg}x = c\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad at + b.\frac{1}{t} = c\sqrt{2} \quad (\text{với } t = \text{cotg}x)$$

$$\Leftrightarrow \quad at^2 - \sqrt{2}\,ct + b = 0$$

- Nếu $a = 0$: (thì $b \neq 0$ vì $a^2 + b^2 > 0$)

Hơn nữa $c^2 > a^2 + b^2 > 0$ nên $c \neq 0$. Do đó $-\sqrt{2}\,ct + b = 0$ có nghiệm.

- Nếu $a \neq 0$: $\Delta = 2c^2 - 4ab = 2(c^2 - 2ab) > 2(a^2 + b^2 - 2ab) = 2(a - b)^2 \geq 0$

Do đó $at^2 - \sqrt{2}\,ct + b = 0$ có nghiệm.

Vậy ta đã chứng minh rằng: $a\cos x + b\sin x = c$ có nghiệm

hay $a\,\text{cotg}x + b\,\text{tg}x = c\sqrt{2}$ có nghiệm.

Đề 2.13

Cho phương trình: $m\cos x + \sin x = 1$ (1)

a) Giải phương trình với $m = -\sqrt{3}$.

b) Tìm m để (1) có nghiệm.

c) Tìm m để mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của:

$$\cos x + m\sin x = m^2 \qquad (2)$$

Giải

a) Với $m = -\sqrt{3}$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

b) Điều kiện để (1) có nghiệm là: $m^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow m^2 \geq 0$: đúng với mọi m.

c) Gọi x là nghiệm chung của (1) và (2) thì có: $\begin{cases} \sin x + m\cos x = 1 \\ m\sin x + \cos x = m^2 \end{cases}$

Giải hệ ta có: $\sin x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & m \\ m^2 & 1 \end{vmatrix}}{1 - m^2} = \dfrac{1 - m^3}{1 - m^2} = \dfrac{1 + m + m^2}{1 + m}$ (với $m \neq \pm 1$)

$$\cos x = \frac{m^2 - m}{1 - m^2} = \frac{-m}{1 + m}$$

- **Khi $m = 1$: (1) và (2) trùng nhau nên thỏa yêu cầu của đề bài.**
- **Khi $m = -1$: (1)** $\Leftrightarrow \quad \sin x - \cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow \quad \cos x - \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

Do đó không thỏa yêu cầu của đề bài.

- Khi $m \neq \pm 1$: $\cos x = \dfrac{-m}{1 + m}$, $\sin x = \dfrac{1 + m + m^2}{1 + m}$

Ta có: $\cos^2x + \sin^2x = 1 \quad \Rightarrow \quad m^2 + (1 + m + m^2)^2 = (1 + m)^2$

$\Rightarrow \quad m^2 + 2m^2(1 + m) + m^4 = 0$

$\Rightarrow \quad m^2(m^2 + 2m + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$

Với m = 0 thì: $(1) \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$(2) \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Do đó thỏa yêu cầu của đề bài.

Kết luận: Để mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2) thì phải có:

$m = 0,\ m = 1.$

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI ĐỐI VỚI sinx VÀ cosx: $a\cos^2x + b\sin^2x + c\sin x\cos x + d = 0$

- *Cách giải:* Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^2x$ thì:

$a + b\,tg^2x + c\,tgx + d(1 + tg^2x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (b + d)tg^2x + c\,tgx + (a + d) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (b + d)t^2 + ct + (a + d) = 0 \quad$ (với $t = tgx$)

- *Lưu ý*: Xét bổ sung trường hợp $\cos x = 0$.

Đề 2.14

Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2x - 5\sin 2x + 21\cos^2x = 0$

b) $\cos^2x - 3\sin x\cos x + 1 = 0$

c) $\cos^2x - \sin^2x - \sqrt{3}\sin 2x - 1 = 0$

d) $\dfrac{1}{\cos x} = 4\sin x + 6\cos x$

e) $3\sin^2(180^\circ - x) + 2\sin(90^\circ + x)\cos(90^\circ + x) - 5\sin^2(270^\circ + x) = 0$.

Giải

a) Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^2x$, ta có:

$tg^2x - 10tgx + 21 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tgx = 3,\ tgx = 7$

$\Leftrightarrow \quad x = arctg\,3 + k\pi, \qquad x = arctg7 + k\pi$

($\cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0,\ \sin^2x = 1$ nên phương trình không thỏa).

b) Chia 2 vế cho $\cos^2x$, thì có:

$1 - 3tgx + 1 + tg^2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tg^2x - 3tgx + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad tgx = 1 \quad$ hay $\quad tgx = 2$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad$ hay $\quad x = arctg2 + k\pi$

($\cos x = 0$ thì phương trình không thỏa).

c) Nhận xét: cosx = 0 thì không thỏa phương trình, chia 2 vế cho $\cos^2x$, thì có:

$$1 - tg^2x - 2\sqrt{3}\,tgx - (1 + tg^2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2tg^2x + 2\sqrt{3}\,tgx = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad tgx = 0 \ \text{ hay } \ tgx = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi \ \text{ hay } \ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi .$$

d) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Chia 2 vế cho cosx, ta có:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 4tgx + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + tg^2x = 4tgx + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad tg^2x - 4tgx - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tgx = -1 \quad \text{hay} \quad tgx = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{hay} \quad x = \text{arctg}5 + k\pi .$$

e)

$$3\sin^2(180^0 - x) + 2\sin(90^0 + x)\cos(90^0 + x) - 5\sin^2(270^0 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin^2x + 2\cos x\sin(-x) - 5\cos^2x = 0$$

(vì $\sin(180^0 - x) = \sin x$, $\sin(90^0 + x) = \cos x$,

$\cos(90^0 + x) = \sin(-x)$, $\sin(270^0 + x) = -\sin(90^0 + x) = -\cos x$)

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin^2x - 2\sin x\cos x - 5\cos^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3tg^2x - 2tgx - 5 = 0 \ (\text{chia 2 vế cho } \cos^2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad tgx = -1 \quad \text{hay} \quad tgx = \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{hay} \quad x = \text{arctg}\frac{5}{3} + k\pi.$$

Đề 2.15

Giải và biện luận theo tham số m phương trình:

$$2\cos^2x + m\sin^2x + 4\sin x\cos x = 0.$$

Giải

- Xét $\cos x \neq 0$: Chia 2 vế phương trình cho $\cos^2x$, ta có:

$$mtg^2x + 4tgx + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad mt^2 + 4t + 2 = 0 \quad (\text{với } t = tgx)$$

- Nếu m = 0: phương trình trở thành:

$$t = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad tgx = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi$$

- Nếu $m \neq 0$: Xét $\Delta' = 4 - 2m$

m	$-\infty$		0		2		∞
Δ'		+	‖	+	0	−	

- Nếu m > 2: phương trình vô nghiệm.

Nếu $m < 2$ $(m \neq 0)$: $t = \frac{1}{m}\left(-2 \pm \sqrt{4-2m}\right) \Leftrightarrow tgx = \frac{1}{m}(-2 \pm \sqrt{4-2m}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \text{arctg}\left[\frac{1}{m}\left(-2 \pm \sqrt{4-2m}\right)\right] + k\pi .$$

– Nếu $m = 2$: phương trình trở thành:

$$2t^2 + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow tgx = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi .$$

- Xét $\cos x = 0$ (thì $\sin^2 x = 1$)

  Thế vào phương trình thì có: $m = 0$

  Do đó khi $m = 0$ thì phương trình có thêm nghiệm:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi .$$

Đề 2.16

Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$.

Giải

Ta có: $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$

$\Leftrightarrow \quad \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow \quad \sin^3 x + \cos^3 x = \sin^3 x - \cos x \sin^2 x + \sin x \cos^2 x - \cos^3 x$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos^3 x + \cos x \sin^2 x - \sin x \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x\,(2\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = 0$ hay $2\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cos x = 0$

Với: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Với: $2\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2 + tg^2 x - tgx = 0$ (chia cho $\cos^2 x$)

$\Leftrightarrow \quad tg^2 x - tgx + 2 = 0$ là vô nghiệm (vì $\Delta = 1 - 8 < 0$)

Vậy: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm.

Đề 2.17

Cho phương trình: $(m + 1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Tìm m để phương trình có nghiệm.

Giải

- Xét $\cos x = 0$: (thì $\sin 2x = 0$, $\sin^2 x = 1$, $\cos 2x = -1$)

  Thế vào phương trình thì: $m + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

  Do đó khi $m = 0$ thì phương trình có nghiệm.

- Xét $\cos x \neq 0$: phương trình được viết thành:

$(m+1)\sin^2x - 2\sin x\cos x + 2\cos^2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (m+1)\text{tg}^2x - 2\text{tg}x + 2 - (1 + \text{tg}^2x) = 0$ (chia cho $\cos^2x$)

$\Leftrightarrow \quad m\text{tg}^2x - 2\text{tg}x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad mt^2 - 2t + 1 = 0$ (với $t = \text{tg}x$)

Với $m \neq 0$ thì phương trình có nghiệm khi:

$$\Delta' = 1 - m \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \leq 1\ (m \neq 0)$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $m \leq 1$.

§4. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI sinx VÀ cosx:

a(sinx + cosx) + bsinx cosx + c = 0

- *Cách giải:*

Đặt ẩn số phụ $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ thì:

$$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1) \quad \text{và } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

Phương trình trở thành: $at + \frac{b}{2}(t^2 - 1) + c = 0$

$\Leftrightarrow \quad bt^2 + 2at + 2c - b = 0$

Do đó phương trình được đưa về giải phương trình bậc hai:

$bt^2 + 2at + 2c - b = 0$ với điều kiện: $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Đề 2.18

Giải các phương trình sau:

a) $3(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x + 3 = 0$

b) $(1 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - \sin 2x - 1 - \sqrt{2} = 0$

c) $\sin x + \cos x - \frac{1}{3}\sin 2x - 1 = 0.$

Giải

a) Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ thì:

$$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = t^2 - 1$$

Phương trình trở thành:

$$3t + 2(t^2 - 1) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = -1, \quad t = -\frac{1}{2}$$

Với $t = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$$

Với $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

Kết luận: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{array}\right.$

b) Với $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ thì phương trình trở thành:

$$(1 + \sqrt{2})t - (t^2 - 1) - 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - (1 + \sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1,\ t = \sqrt{2}$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

Với $t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

Kết luận: $x = k2\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

c) Với $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ thì phương trình trở thành:

$$t - \frac{1}{3}(t^2 - 1) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 3t + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1,\ t = 2$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$

Với $t = 2 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ (phương trình này vô nghiệm)

Kết luận: $x = k2\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Đề 2.19

Giải các phương trình sau:

a) **$\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = 4$**

b) **$\sin x - \cos x + 4\sin 2x = 1$**

c) **$\sin x + \cos x = \cot g x - tg x$**

d) **$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = -1$.**

Giải

a) Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ thì $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

và $t^2 = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình trở thành:

$$1 - t^2 + 4t = 4 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1,\ t = 3 \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi,\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

b) Với $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \pi/4)$ thì $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

và $t^2 = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình trở thành:

$$t + 4(1 - t^2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4t^2 - t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1,\ t = -\frac{3}{4}$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$$

Với $t = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{array}\right.$

Kết luận: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{array}\right.$

c) Điều kiện: $(\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0) \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$

Ta có: $\sin x + \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x).\sin x \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x \cos x - (\cos x - \sin x)) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$ hay $\sin x \cos x - (\cos x - \sin x) = 0$

- Với $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

- Với $\sin x \cos x - (\cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1 - t^2}{2} - t = 0$ (với $t = \cos x - \sin x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$)

$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1 + \sqrt{2}$, $t = -1 - \sqrt{2}$ (loại vì $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$)

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi$

Kết luận: $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi$.

d) Điều kiện: $x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Ta có: $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = -1 \Leftrightarrow \sin x - \cos x + \sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow t + \frac{1 - t^2}{2} = 0$ (với $t = \sin x - \cos x$)

$\Leftrightarrow \quad t^2 - 2t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \pm \sqrt{2}$

Vì $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ nên chỉ nhận $t = 1 - \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi \quad \text{hay} \quad x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi.$$

Đề 2.20

Tìm m để phương trình: m(sinx + cosx) + sin2x = 0 có nghiệm.

Giải

Đặt: $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

thì: $t^2 = 1 + \sin 2x$ và $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

Phương trình trở thành:

$$mt + t^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + mt - 1 = 0 \quad (\text{với } -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}) \qquad (*)$$

Ta có: $\Delta = m^2 + 4 > 0$ với mọi m

$$f(\sqrt{2}) = 2 + m\sqrt{2} - 1 = 1 + m\sqrt{2} \quad (\text{với } f(t) = t^2 + mt - 1)$$

$$f(-\sqrt{2}) = 2 - m\sqrt{2} - 1 = 1 - m\sqrt{2}$$

$$\frac{s}{2} - \sqrt{2} = -\frac{m}{2} - \sqrt{2}; \qquad \frac{s}{2} + \sqrt{2} = -\frac{m}{2} + \sqrt{2}.$$

Phương trình có nghiệm khi (*) có nghiệm thỏa:

- Trường hợp 1: $t_1 \le -\sqrt{2} \le t_2 \le \sqrt{2}$ hay $-\sqrt{2} \le t_1 \le \sqrt{2} \le t_2$

$$\Leftrightarrow \quad f(\sqrt{2}).f(-\sqrt{2}) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m\sqrt{2} + 1)(-m\sqrt{2} + 1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m \le -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{hay} \quad m \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Trường hợp 2: $-\sqrt{2} \le t_1 \le t_2 \le \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ f(\sqrt{2}) \ge 0 \\ f(-\sqrt{2}) \ge 0 \\ \dfrac{s}{2} - \sqrt{2} \le 0 \\ \dfrac{s}{2} + \sqrt{2} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in R \\ m \ge -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ m \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ m \ge -2\sqrt{2} \\ m \le 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \le m \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Kết luận: Phương trình có nghiệm với mọi $m \in R$.

Nhận xét: Ta có thể giải rất gọn bài toán trên như sau:

Ta có: $t_1.t_2 = -1$ (công thức VIET)

$$\Rightarrow \quad |t_1|.|t_2| = 1$$

$$\Rightarrow \quad |t_1|.|t_2| \le 2 = \sqrt{2}.\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |t_1| \le \sqrt{2} \text{ hay } |t_2| \le \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\sqrt{2} \le t_1 \le \sqrt{2} \quad \text{hay} \quad -\sqrt{2} \le t_2 \le \sqrt{2}$$

Do đó để phương trình (*) có nghiệm $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ chỉ cần thỏa điều kiện $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m^2 + 4 \ge 0$. Điều này đúng với mọi $m \in R$.

Đề 2.21

Giải và biện luận theo tham số m phương trình:

$$\mathbf{\sin x - \cos x = m \sin x \cos x.}$$

Giải

Đặt: $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

thì: $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x$ và $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Phương trình được viết thành:

$$t = m\left(\frac{1 - t^2}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad mt^2 + 2t - m = 0 \qquad (*)$$

Nếu $m = 0$: $(*) \Leftrightarrow t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Với $m \ne 0$: Ta có $\Delta' = 1 + m^2 > 0$ với mọi m

$$mf(\sqrt{2}) = m(m + 2\sqrt{2})$$

$$mf(\sqrt{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0, m = -2\sqrt{2}$$

$$mf(-\sqrt{2}) = m(m - 2\sqrt{2})$$

$$mf(-\sqrt{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m - 2\sqrt{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0, m = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{S}{2} - \sqrt{2} = -\frac{1}{m} - \sqrt{2} = \frac{-\sqrt{2}m - 1}{m}$$

$$\frac{S}{2} - \sqrt{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{S}{2} + \sqrt{2} = -\frac{1}{m} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}m - 1}{m}$$

$$\frac{S}{2} + \sqrt{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

m	Δ'	$mf(\sqrt{2})$	$mf(-\sqrt{2})$	$\frac{S}{2}-\sqrt{2}$	$\frac{S}{2}+\sqrt{2}$	
$-\infty$						
	+	+	+		+	$-\sqrt{2} < t_1 < t_2 < \sqrt{2}$
$-2\sqrt{2}$		0				$t_1 = \sqrt{2},\ t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
	+	−	+	−	+	
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				0		$-\sqrt{2} < t_1 < \sqrt{2} < t_2$
	+	−	+	+	+	
0		0	0			$t = 0$
	+	+	−	−	−	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$					0	$t_1 < -\sqrt{2} < t_2 < \sqrt{2}$
	+	+	−	−	+	
$2\sqrt{2}$			0			$t_1 = -\sqrt{2}, t_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$
	+	+	+	−	+	
∞						$-\sqrt{2} < t_1 < t_2 < \sqrt{2}$

Biện luận:

- $m < -2\sqrt{2}$: $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+m^2}}{m} \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+m^2}}{m\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{-1 \pm \sqrt{1+m^2}}{m\sqrt{2}} + k2\pi$$

hay $$x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\frac{-1 \pm \sqrt{1+m^2}}{m\sqrt{2}} + k2\pi$$

- $m = -2\sqrt{2}: \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \text{ hay } x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi$$

- $-2\sqrt{2} < m < 0$: nhận $t = \dfrac{-1 + \sqrt{1+m^2}}{m} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 + \sqrt{1+m^2}}{m\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{-1 + \sqrt{1+m^2}}{m\sqrt{2}} + k2\pi$$

hay $$x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\frac{-1 + \sqrt{1+m^2}}{m\sqrt{2}} + k2\pi$$

- $0 < m < 2\sqrt{2}$: nhận $t = \dfrac{-1 + \sqrt{1+m^2}}{m} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m\sqrt{2}} + k2\pi$$

$$\text{hay} \quad x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m\sqrt{2}} + k2\pi$$

- $m = 2\sqrt{2}$: $t_1 = -\sqrt{2}$, $t_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1, \ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi , \ \frac{5\pi}{12} + k2\pi , \ x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi$$

- $m > 2\sqrt{2}$: $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+m^2}}{m}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+m^2}}{m\sqrt{2}} \equiv \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi \quad \text{hay} \quad x = \frac{5\pi}{4} - \alpha + k2\pi .$$

Đề 2.22

Tìm m để phương trình: 2(sinx + cosx) + 2sinxcosx + m = 0 có nghiệm thỏa điều kiện $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Giải

Đặt: $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

thì: $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x = t^2 - 1$

Với $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\pi}{4} < x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < t \le \sqrt{2}$$

Phương trình trở thành: $2t + t^2 - 1 + m = 0$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 + 2t - 1 = -m \qquad (*)$$

Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp đồ thị như sau:

Vẽ đồ thị của $y = t^2 + 2t - 1$ (với $1 < t \le \sqrt{2}$)

t	1	$\sqrt{2}$
y	2 $\nearrow$	$1 + 2\sqrt{2}$

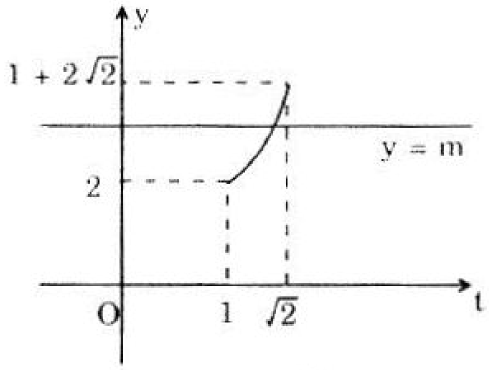
Ta có: phương trình có nghiệm khi đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số:

$$y = t^2 + 2t - 1 \quad (1 < t \le \sqrt{2})$$

Do đó:

$$2 < -m \le 1 + 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -(1 + 2\sqrt{2}) \le m < -2$$



§5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC VÀ CÁC PHÉP GIẢI

Trong các mục vừa nêu ở trên, ta đã xét một số cách giải cho các phương trình lượng giác thường gặp. Thế nhưng phương trình lượng giác thì có rất nhiều dạng và do đó đòi hỏi phải có nhiều cách giải tương ứng thích hợp. Để giải tốt các phương trình lượng giác ta cần phải sử dụng thành thạo các công thức biến đổi lượng giác (công thức cộng, công thức cung bội, công thức biến tổng sang tích và ngược lại, v.v...). Ở đây không có một quy tắc tổng quát nào mà phải áp dụng một cách linh hoạt vào từng phương trình cụ thể. Kinh nghiệm về cách giải chỉ có thể có được thông qua quá trình rèn luyện giải toán.

Sau đây là một số hướng giải phương trình lượng giác:

1. Biến đổi phương trình thành dạng tích số: Do việc áp dụng các công thức biến đổi lượng giác mà phát hiện ra thừa số chung.

2. Dùng ẩn số phụ để đưa về dạng phương trình đại số quen biết: Các ẩn số phụ thường dùng là sinx, cosx, cotgx, $\text{tg}\,\dfrac{x}{2}$ ...v..v..

3. Biến đổi đưa về các phương trình lượng giác thông dụng.

4. Dùng tính chất $|\sin x| \le 1$ và $|\cos x| \le 1$:

$$\cos a + \cos b = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos a = 1 \\ \cos b = 1 \end{cases}$$

$$\cos a + \cos b = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos a = -1 \\ \cos b = -1 \end{cases}$$

$$\cos a - \cos b = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos a = 1 \\ \cos b = -1 \end{cases}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos a = -1 \\ \cos b = 1 \end{cases}$$

$$\cos a \cos b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos a = 1 \\ \cos b = 1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} \cos a = -1 \\ \cos b = -1 \end{cases}$$

$$\cos a\cos b = -1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\cos a = 1\\ \cos b = -1\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}\cos a = -1\\ \cos b = 1\end{cases}$$

- Các biến đổi trên vẫn còn đúng khi thay cosin bởi sin.

Đề 2.23

Giải phương trình: $3\cos^2x - \sin^2x = \text{tg}x.$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Đặt $t = \text{tg}x$ thì phương trình được viết thành:

$$\frac{3}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = t \quad \Leftrightarrow \quad 3 - t^2 = t + t^3$$

$$\Leftrightarrow \quad t^3 + t^2 + t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)(t^2+2t+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t - 1 = 0 \quad (\text{vì } t^2 + 2t + 3 = 0\text{: vô nghiệm})$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}x = \text{tg}\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Vậy: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Đề 2.24

Giải phương trình: $(1 + \sin 2x)(1 - \text{tg}x) = 1 + \text{tg}x.$

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Đặt $t = \text{tg}x$ thì phương trình được viết thành:

$$\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)(1-t) = 1 + t \quad \Leftrightarrow \quad (1+t)^2(1-t) = (1+t)(1+t^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (t+1)\left[(t+1)(1-t) - (1+t^2)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t+1)(-2t^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1 \text{ hay } t = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x = -1 \text{ hay } \text{tg}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = k\pi$$

Vậy: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = k\pi$.

Đề 2.25

Giải phương trình: $2(\text{tg}x - \text{cotg}x) = \sqrt{3}\,(\text{tg}^2x + \text{cotg}^2x - 2).$

Giải

Điều kiện: $x \neq k\frac{\pi}{2}$

Đặt $X = \text{tg}x - \text{cotg}x$ thì $X^2 = \text{tg}^2x + \text{cotg}^2x - 2$

Phương trình được viết thành: $2X = \sqrt{3}\,X^2 \Leftrightarrow X = 0$ hay $X = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Với $X = 0$ thì: $\text{tg}x - \text{cotg}x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x = \text{cotg}x \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Với $X = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ thì: $\text{tg}x - \text{cotg}x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow t - \dfrac{1}{t} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (đặt $t = \text{tg}x$)

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\,t^2 - 2t - \sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{3} \quad \text{hay} \quad t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x = \sqrt{3} \quad \text{hay} \quad \text{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{hay} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

Vậy: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Đề 2.26

1. Giải phương trình: $\cos 2x - \text{tg}^2x = \dfrac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$

2. Tìm tổng các nghiệm của phương trình trên với $1 \le x \le 70$.

Giải

1. Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Phương trình được viết thành:

$$\cos 2x - \text{tg}^2x = 1 - \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x - \text{tg}^2x = 1 - \cos x - (1 + \text{tg}^2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x + \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = -1 \quad \text{hay} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pi + k2\pi \quad \text{hay} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Do biểu diễn đầu cung trên đường tròn lượng giác ta có thể biểu diễn nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3}$.

2. Với $1 \le x \le 70$ thì có:

- $1 \le \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \le 70 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le k \le 32$ (vì k là số nguyên)

Do đó các nghiệm thỏa $1 \le x \le 70$ bao gồm:

$$x_0 = \frac{\pi}{3} \qquad (k = 0)$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \qquad (k = 1)$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + 2.\frac{2\pi}{3} \qquad (k = 2)$$

. . . . .

$$x_{32} = \frac{\pi}{3} + 32.\frac{2\pi}{3} \qquad (k = 32)$$

Vậy tổng các nghiệm cần tìm là:

$$S = 33.\frac{\pi}{3} + (1 + 2 + \ldots + 32).\frac{2\pi}{3}$$

$$= 11\pi + \frac{32}{2}(1 + 32).\frac{2\pi}{3} \quad \text{(dùng công thức tổng của cấp số cộng)}$$

$$= 11\pi + 352\pi = 363\pi.$$

Đề 2.27

Giải phương trình: $\mathbf{tg^2x(1 - sinx) = 1 + cosx.}$

Giải

Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Phương trình được viết thành: $\sin^2x(1 - \sin x) = \cos^2x\,(1 + \cos x)$

$\Leftrightarrow \quad (1 - \cos^2x)(1 - \sin x) = (1 - \sin^2x)(1 + \cos x)$

$\Leftrightarrow \quad (1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 - \sin x) = (1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 + \cos x)$

$\Leftrightarrow \quad (1 + \cos x)(1 - \sin x)[1 - \cos x - (1 + \sin x)] = 0$

$\Leftrightarrow \quad (1 + \cos x)(1 - \sin x)(-\cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = -1 \quad$ hay $\quad \sin x = 1 \quad$ hay $\quad \cos x + \sin x = 0$

Với $\sin x = 1$ thì $\cos x = 0$ (không thỏa điều kiện)

Với $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

Với $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

Kết luận: $x = \pi + k2\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

Đề 2.28

Giải phương trình: **$3\sin x + 2\cos x = 2 + 3\text{tg}x$.**

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Phương trình được viết thành:

$$(3\sin x + 2\cos x)\cos x = 2\cos x + 3\sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 2\cos x + 3\sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin x(\cos x - 1) + 2\cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x - 1)(3\sin x + 2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = 1 \text{ hay } \text{tg}x = -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = k2\pi \text{ hay } x = \text{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi$$

Vậy: $x = k2\pi$, $x = \text{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi$.

Đề 2.29

Giải phương trình: **$2(\text{tg}x - \sin x) + 3(\text{cotg}x - \cos x) + 5 = 0$.**

Giải

Điều kiện: $x \neq k\frac{\pi}{2}$. Phương trình được viết thành:

$$(2\text{tg}x + 3) + (3\text{cotg}x + 2) - (2\sin x + 3\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin x + 3\cos x}{\cos x} + \frac{3\cos x + 2\sin x}{\sin x} - (2\sin x + 3\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 3\cos x)\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 3\cos x)(\sin x + \cos x - \sin x\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin x + 3\cos x = 0 \quad \text{hay} \quad \sin x + \cos x - \sin x\cos x = 0$$

- Với $2\sin x + 3\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x = -3\cos x$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x = -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi$$

- Với $\sin x + \cos x - \sin x\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad t - \frac{1}{2}(t^2 - 1) = 0 \quad (\text{đặt } t = \sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 2t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \pm \sqrt{2}$$

Vì $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ nên chỉ nhận $t = 1 - \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi$$

Vậy: $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi$, $\quad x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + k2\pi$.

Đề 2.30

Giải phương trình: $1 + \sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$\sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\left(\sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \text{hay} \quad \sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 0$$

- Với $\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi$
- Với $\sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^3\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sin\frac{x}{2} - 1\right)\left(2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2} - 1 = 0 \quad \left(\text{còn } 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} + 1 = 0 \text{: vô nghiệm}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + k4\pi$$

Kết luận: $x = k\pi$ là nghiệm.

Đề 2.31

Giải phương trình: $\mathbf{8\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}}$.

Giải

Điều kiện: $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$. Phương trình được viết thành:

$$8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 x\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(1-\cos^2 x)\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cos x - 4\cos^3 x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos 3x = -\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \cos 3x = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = \pm\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{hay} \quad x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$$

Vậy: $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}$ là nghiệm.

Đề 2.32

Giải phương trình: $\mathbf{3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x}$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$3\sin 3x - 4\sin^3 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} \vee x = \frac{7\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9}.$$

Đề 2.33

Giải phương trình: $\mathbf{\sin^2 x + \sin 2x.\sin 4x + \sin 3x.\sin 9x + \sin 4x.\sin 16x = 1}$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos2x) + \frac{1}{2}(\cos2x - \cos6x) + \\ + \frac{1}{2}(\cos6x - \cos12x) + \frac{1}{2}(\cos12x - \cos20x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos20x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos20x = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 20x = \pi + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10}.$$

Đề 2.34

Cho n là số nguyên thỏa n > 1. Chứng minh phương trình:

$\sin2x + \sin3x + ... + \sin nx = n - 1$ là vô nghiệm.

Giải

Ta có: $\sin x \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên phương trình trên tương đương với hệ:

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 & (1) \\ \sin 3x = 1 & (2) \\ \cdots\cdots & \\ \sin nx = 1 & \end{cases}$$

Với $(1) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$(2) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$

Ta thấy (1) và (2) không có nghiệm chung nên hệ thống trên vô nghiệm và suy ra phương trình đã cho là vô nghiệm.

Đề 2.35

Cho phương trình: $(\cos x + \sin x)\sin2x = m$ (*)

a) Cho $|m| > \sqrt{2}$. Chứng minh phương trình (*) vô nghiệm

b) Cho $|m| = \sqrt{2}$. Giải phương trình (*).

Giải

a) Từ phương trình ta suy ra: $|(\cos x + \sin x)\sin2x| = |m|$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x\right| = |m| \qquad (1)$$

Mà: $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1$ và $|\sin2x| \le 1$

nên: $\sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x\right| \le \sqrt{2} < |m|$

Do đó phương trình (1) vô nghiệm và suy ra (*) vô nghiệm.

b) Ta có: $|m| = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$

- Với $m = \sqrt{2}$: (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases}$$

– Với: $\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k'2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k'\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

– Với: $\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + k'2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k'\pi \end{cases}$ (Hệ VN)

- Với $m = -\sqrt{2}$: (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = -\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \pi + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = k'2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k'\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$$

(Đọc giả tự kiểm tra rằng $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$ thỏa $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$)

Kết luận: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$ (hay ghi tóm tắt là: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$).

Đề 2.36

a) Giải phương trình $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Đặt X = cosx. Chứng tỏ: $X_1 = \cos\frac{\pi}{12}, X_2 = \cos\frac{9\pi}{12}, X_3 = \cos\frac{17\pi}{12}$

là 3 nghiệm phân biệt của phương trình: $4X^3 - 3X - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

c) Tính các biểu thức sau:

$$A = X_1 + X_2 + X_3, \qquad B = X_1X_2X_3, \qquad C = X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_1.$$

Giải

a) Ta có: $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}$$

Lời giải này được biểu diễn 6 đầu cung trên đường tròn lượng giác:

$$x = \pm\frac{\pi}{12},\ x = \frac{7\pi}{12},\ x = \frac{9\pi}{12},\ x = \frac{17\pi}{12},\ x = \frac{15\pi}{12}.$$

b) Đặt X = cosx thì ta có: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4X^3 - 3X$

Do đó phương trình $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ được viết thành:

$$4X^3 - 3X = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4X^3 - 3X - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Hơn nữa 6 đầu cung biểu diễn lời giải của $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tương ứng với 3 giá trị của X gồm:

$$X_1 = \cos\left(\pm\frac{\pi}{12}\right),\quad X_2 = \cos\frac{9\pi}{12} = \cos\frac{15\pi}{12},\quad X_3 = \frac{17\pi}{12} = \cos\frac{7\pi}{12}$$

Vậy X_1, X_2, X_3 là 3 nghiệm phân biệt của $4X^3 - 3X - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

c) Xét phương trình: $4X^3 - 3X - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Theo công thức VIET, ta có:

$$A = X_1 + X_2 + X_3 = -\frac{b}{a} = 0 \quad (\text{với } a = 4,\ b = 0,\ c = -3,\ d = -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$B = X_1X_2X_3 = -\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$C = X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_1 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{4}.$$

Đề 2.37

a) Giải phương trình: cos3x = cosa (a: cho trước).

b) Suy ra cách giải phương trình: $4t^3 - 3t - \cos a = 0$.

Giải

a) Ta có: $\cos 3x = \cos a \Leftrightarrow 3x = \pm a + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{a}{3} + k\frac{2\pi}{3}$

Lời giải này được biểu diễn trên đường tròn lượng giác bởi 6 đầu cung như sau:

$$\pm\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}+\frac{2\pi}{3},\ \frac{a}{3}+\frac{4\pi}{3},\ -\frac{a}{3}+\frac{2\pi}{3},\ -\frac{a}{3}+\frac{4\pi}{3}$$

ứng với ba giá trị tương ứng của t = cosx gồm:

$$t_1 = \cos\left(\pm\frac{a}{3}\right), \qquad t_2 = \cos\left(\frac{a}{3}+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{a}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

và $$t_3 = \cos\left(\frac{a}{3}+\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{a}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

b) Đặt t = cosx thì $\cos 3x = 4t^3 - 3t$ nên phương trình:

$$4t^3 - 3t - \cos a = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - \cos a = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm\frac{a}{3} + k\frac{2\pi}{3} \text{ (theo câu a)}$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \cos\frac{a}{3}, \quad t_2 = \cos\left(\frac{a}{3}+\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{và} \quad t_3 = \cos\left(\frac{a}{3}+\frac{4\pi}{3}\right).$$

Kết luận: $t_1 = \cos\frac{a}{3}$, $t_2 = \cos\left(\frac{a}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$ và $t_3 = \cos\left(\frac{a}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$ là nghiệm.

Đề 2.38

Cho phương trình: 2cos3xcos2xcosx + m = 7cos2x

a) Giải phương trình với m = –7.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in \left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right]$.

Giải

a) Với m = –7 thì phương trình trở thành:

$$\cos 2x(2\cos 3x\cos x) - 7 = 7\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) - 7 = 7\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x) - 7 - 7\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow t(2t^2 - 1 + t) - 7 - 7t = 0 \quad (\text{với } t = \cos 2x,\ -1 \le t \le 1)$$

$$\Leftrightarrow t(2t^2 + t - 1) - 7(t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t+1)(2t^2-t-7)=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=-1 \vee t=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{57})$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên chỉ nhận $t=-1$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x=-1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=\pi+k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Vậy: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ là nghiệm.

b) Đặt $t=\cos 2x$ thì ta có:

$$-\frac{3\pi}{8}\le x\le -\frac{\pi}{8} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3\pi}{4}\le 2x\le -\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\le t\le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Phương trình được viết thành:

$$t(2t^2+t-1)+m-7t=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^3+t^2-8t=-m \qquad (1)$$

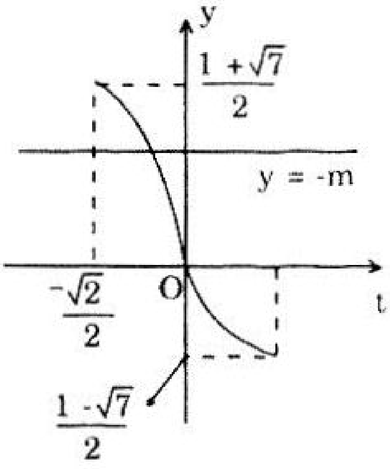
Để tìm điều kiện cho (1) có nghiệm, ta dùng phương pháp đồ thị .

Xét hàm số: $y=2t^3+t^2-8t \quad (-\frac{\sqrt{2}}{2}\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$y'=6t^2+2t-8$$

$$y'=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=1,\ t=-\frac{4}{3}$$

t	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
y'		$-$	
y	$\frac{1+7\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1-7\sqrt{2}}{2}$



Bằng đồ thị ta có phương trình có nghiệm $x\in\left[-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{8}\right]$ khi phương trình (1) có nghiệm $t\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, do đó phải có:

$$\frac{1-7\sqrt{2}}{2}\le -m\le\frac{1+7\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7\sqrt{2}-1}{2}\ge m\ge -\frac{1+7\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy đáp số là: $-\frac{1+7\sqrt{2}}{2}\le m\le\frac{7\sqrt{2}-1}{2}$.

Đề 2.39

Tìm m để phương trình: $(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+m)=3-4\cos^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x\in[0;\pi]$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4(1 - \sin^2 x) = 4\sin^2 x - 1$$

$$= (2\sin x - 1)(2\sin x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m - 2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x - 1)(2\cos 2x + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x - 1)(2(1 - 2\sin^2 x) + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad \sin^2 x = \frac{1}{4}(m + 1)$$

Với $\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \quad (\text{vì } 0 \le x \le \pi)$

Do đó để phương trình có đúng 2 nghiệm $x \in [0; \pi]$ thì phải có:

$$\frac{m+1}{4} > 1 \quad \text{hoặc} \quad \frac{m+1}{4} < 0 \quad \text{hoặc} \quad \frac{m+1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$m > 3 \quad \text{hoặc} \quad m < -1 \quad \text{hoặc} \quad m = 0$$

(khi $\frac{m+1}{4} >$ hoặc $\frac{m+1}{4} < 0$ thì $\sin^2 x = \frac{m+1}{4}$ vô nghiệm;

khi $\frac{m+1}{4} = \frac{1}{4}$ thì $\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2}$ cho nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ vì $0 \le x \le \pi$)

Vậy: $m < -1 \vee m = 0 \vee m > 3$ là giá trị cần tìm.

Đề 2.40

Giải phương trình: $6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x \cos x$.

Giải

Trước tiên ta thấy rằng $\cos x = 0$ không thỏa phương trình.

Phương trình được viết thành:

$$6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad 6.\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x} - 2 = 10.\frac{\sin x}{\cos x} \qquad (\text{chia 2 vế cho } \cos^3 x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\text{tg}x(1 + \text{tg}^2 x) - 2 = 10\text{tg}x \quad \Leftrightarrow \quad 6\text{tg}^3 x - 4\text{tg}x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3t^3 - 2t - 1 = 0 \ (\text{đặt } t = \text{tg}x) \quad \Leftrightarrow \quad (t - 1)(3t^2 + 3t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 1 \ \ (\text{vì } 3t^2 + 3t + 1 = 0 \text{ vô nghiệm})$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ là nghiệm.

Đề 2.41

Giải phương trình: $8\cos x + 6\sin x - \cos 2x - 7 = 0.$

Giải

Đặt: $t = \text{tg}\dfrac{x}{2}$ (với $x \neq \pi + k2\pi$) thì $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{t^4 - 6t^2 + 1}{(1+t^2)^2}$$

Phương trình được viết thành:

$$8\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + 6\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) - \frac{t^4 - 6t^2 + 1}{(1+t^2)^2} - 7 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 8(1-t^2)(1+t^2) + 12t(1+t^2) - t^4 + 6t^2 - 1 - 7(1 + 2t^2 + t^4) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 8(1-t^4) + 12t + 12t^3 - t^4 + 6t^2 - 1 - 7 - 14t^2 - 7t^4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -16t^4 + 12t^3 - 8t^2 + 12t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4t(4t^3 - 3t^2 + 2t - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad t(t-1)(4t^2 + t + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad t = 0 \vee t = 1$ (còn $4t^2 + t + 3 = 0$ vô nghiệm)

Với $t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}\dfrac{x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x}{2} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k2\pi$

Với $t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}\dfrac{x}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

Ngoài ra khi $x = \pi + k2\pi$ thì phương trình không thỏa.

Vậy: $x = k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ là nghiệm.

Đề 2.42

Giải phương trình: $\text{tg}(120^\circ + 3x) - \text{tg}(140^\circ - x) = 2\sin(80^\circ + 2x).$

Giải

Đặt $t = 40^\circ + x$ thì ta có:

$120^\circ + 3x = 3(40^\circ + x) = 3t$, $80^\circ + 2x = 2(40^\circ + x) = 2t$

và $140^\circ - x = 180^\circ - (40^\circ + x) = 180^\circ - t$

Phương trình được viết thành: $\text{tg}3t - \text{tg}(180^\circ - t) = 2\sin 2t$

$\Leftrightarrow \quad \text{tg}3t + \text{tg}t = 2\sin 2t$ (điều kiện: $\cos t \neq 0$, $\cos 3t \neq 0$)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin 4t}{\cos 3t.\cos t} = 2\sin 2t \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin 2t.\cos 2t = 2\sin 2t.\cos 3t.\cos t$

$\Leftrightarrow \quad \sin 2t(\cos 2t - \cos 3t\cos t) = 0$

- Với $\sin 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t = k.180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad t = k.90^\circ$

Do điều kiện nên chỉ nhận $t = k.180^\circ$

$$\Leftrightarrow \quad 40^\circ + x = k.180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad x = -40^\circ + k.180^\circ$$

- Với $\cos 2t - \cos 3t \cos t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2t - \frac{1}{2}[\cos 2t + \cos 4t] = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2t - \cos 4t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 4t = \cos 2t \quad \Leftrightarrow \quad 4t = \pm 2t + k.360^\circ$$

$$4t = 2t + k360^\circ \quad \Leftrightarrow \quad t = k.180^\circ \text{ (thỏa điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 40^\circ + x = k.180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad x = -40^\circ + k.180^\circ$$

$$4t = -2t + k.360^\circ \quad \Leftrightarrow \quad t = k.60^\circ \text{ (thỏa điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 40^\circ + x = k60^\circ \quad \Leftrightarrow \quad x = -40^\circ + k60^\circ$$

Kết luận: $x = -40^\circ + k.60^\circ$.

Đề 2.43

Giải và biện luận theo tham số m phương trình:

$$\frac{m^2}{1 - tg^2 x} = \frac{\sin^2 x + m^2 - 2}{\cos 2x}.$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} tg^2 x \neq 1 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} tgx \neq \pm 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

Đặt $t = tgx$ thì $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1 + t^2}$ và $\cos 2x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$

Phương trình được viết thành:

$$\frac{m^2}{1 - t^2} = \frac{\dfrac{t^2}{1 + t^2} + m^2 - 2}{\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m^2}{1 - t^2} = \frac{(-1 + m^2)t^2 + m^2 - 2}{1 - t^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 = (m^2 - 1)t^2 + m^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad (m^2 - 1)t^2 = 2$$

– Nếu $m = \pm 1$: phương trình vô nghiệm

– Nếu $m \neq \pm 1$: ta có: $t^2 = \dfrac{2}{m^2 - 1}$

Điều kiện cho: $t^2 \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \neq m^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 \neq 3 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq \pm\sqrt{3}$

Do đó, ta có sự biện luận như sau:

- Nếu $m = \pm\sqrt{3}$: phương trình vô nghiệm
- Nếu $m \neq \pm 1$và $m \neq \pm\sqrt{3}$: $tgx = \pm\sqrt{\dfrac{2}{m^2 - 1}} \quad \Leftrightarrow \quad x = arctg\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{m^2 - 1}}\right) + k\pi$

Đề 2.44

Cho phương trình: $m\sin x + (m+1)\cos x = \dfrac{m}{\cos x}$ (*)

1. Tìm m để phương trình (*) có nghiệm.

2. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (*) thỏa: $x_1 + x_2 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Hãy tính $\cos(2x_1 + 2x_2)$ theo m.

Giải

1. Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Phương trình được viết thành:

$$m\sin x\cos x + (m+1)\cos^2 x = m$$

$$\Leftrightarrow \quad m\,\mathrm{tg}x + m + 1 = m(1 + \mathrm{tg}^2 x) \quad \text{(chia 2 vế cho } \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \quad m\,\mathrm{tg}^2 x - m\,\mathrm{tg}x - 1 = 0 \qquad (1)$$

- Nếu $m = 0$: phương trình (1) vô nghiệm
- Nếu $m \neq 0$: (1) có nghiệm khi $\Delta = m^2 + 4m \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \leq -4 \vee m > 0$

Vậy: $m \leq -4 \vee m > 0$ thì phương trình (*) có nghiệm.

2. Với $t = \mathrm{tg}x$ thì (1) trở thành: $mt^2 - mt - 1 = 0$ (2)

Theo VIET thì: $t_1 + t_2 = 1, \quad t_1t_2 = -\dfrac{1}{m}$

Với x_1, x_2 là nghiệm của (*) thì $t_1 = \mathrm{tg}x_1$, $t_2 = \mathrm{tg}x_2$ là nghiệm của (2), do đó:

$$\mathrm{tg}(x_1 + x_2) = \frac{\mathrm{tg}x_1 + \mathrm{tg}x_2}{1 - \mathrm{tg}x_1\mathrm{tg}x_2} = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1t_2} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{m}} = \frac{m}{m+1}$$

Ta có: $$\cos(2x_1 + 2x_2) = \frac{1 - \mathrm{tg}^2(x_1 + x_2)}{1 + \mathrm{tg}^2(x_1 + x_2)} = \frac{1 - \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^2}$$

$$= \frac{(m+1)^2 - m^2}{(m+1)^2 + m^2} = \frac{2m+1}{2m^2 + 2m + 1}$$

Vậy: $$\cos 2(x_1 + x_2) = \frac{2m+1}{2m^2 + 2m + 1}.$$

Đề 2.45

Cho phương trình bậc hai: $mx^2 + mpx + p = 0$ (với $pm \neq 0$).

1. Lập hệ thức giữa p và m để phương trình có 2 nghiệm là x_1, x_2 thỏa $x_1 = \sin a$, $x_2 = \mathrm{tg}a$ (với a là một số nào đó).

2. Với điều kiện như trong câu 1, hãy tính x_1, x_2, $\frac{1-\cos a}{\sin a}$, $\frac{\sin a}{1+\cos a}$ theo m. Suy ra cách tính m theo a.

3. Với m, p như trong câu 1, hãy tìm m sao cho $2pm + 1 = 0$. Tìm a.

4. Vẫn với điều kiện của câu 1, hãy tính m theo x_1. Biện luận.

Áp dụng với $x_1 = \frac{1}{2}$ để suy ra cách tính $\text{tg}\frac{\pi}{12}$ và $\text{tg}\frac{5\pi}{12}$.

Giải

1. Phương trình $mx^2 + mpx + p = 0$ cho ta: $x_1 + x_2 = p$ và $x_1x_2 = \frac{p}{m}$

Để $x_1 = \sin a$ và $x_2 = \text{tg}a$ thì ta có:

$$\begin{cases} \sin a + \text{tg}a = p & (1) \\ \sin a.\text{tg}a = \dfrac{p}{m} & (2) \end{cases}$$

Ta có: $\sin^2 a.\text{tg}^2 a = \frac{\text{tg}^2 a}{1+\text{tg}^2 a}.\text{tg}^2 a = \left(1 - \frac{1}{\text{tg}^2 a + 1}\right)\text{tg}^2 a$

$$= \text{tg}^2 a - \frac{\text{tg}^2 a}{\text{tg}^2 a + 1} = \text{tg}^2 a - \sin^2 a = (\text{tg}a + \sin a)(\text{tg}a - \sin a)$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}a - \sin a = \frac{(\sin a.\text{tg}a)^2}{\text{tg}a + \sin a} = \frac{\left(\dfrac{p}{m}\right)^2}{p} = \frac{p}{m^2} \qquad (\text{do } (1) \text{ và } (2))$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}a - \sin a = \frac{p}{m^2} \qquad (3)$$

Cộng vế (1) và (3) thì có: $\text{tg}a = \frac{p}{2}\left(1 + \frac{1}{m^2}\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{m^2+1}{m^2}\right)$

Trừ vế (1) cho (3), ta có: $\sin a = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)$

Thế $\text{tg}a = \frac{p}{2}\left(\frac{m^2+1}{m^2}\right)$ và $\sin a = \frac{p}{2}\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)$ vào (2), ta được:

$$\frac{p^2}{4}\left(\frac{m^2+1}{m^2}\right)\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right) = \frac{p}{m} \quad \Leftrightarrow \quad p(m^4 - 1) = 4m^3$$

Vậy: $p(m^4 - 1) = 4m^3$ là hệ thức cần tìm.

2. Ta có: $x_1 = \sin a = \frac{p}{2}\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)$

Mà theo câu 1 thì: $p(m^4 - 1) = 4m^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{2} = \frac{2m^3}{m^4 - 1}$

nên: $x_1 = \frac{2m^3}{m^4-1}.\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right) = \frac{2m}{m^2+1}$

Ta có: $x_2 = \text{tga} = \frac{p}{2}\left(\frac{m^2+1}{m^2}\right) = \frac{2m^3}{m^4-1}.\left(\frac{m^2+1}{m^2}\right) = \frac{2m}{m^2-1}$

Ta lại có: $\frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\sin a} - \frac{1}{\text{tga}} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{m^2+1}{2m} - \frac{m^2-1}{2m} = \frac{2}{2m} = \frac{1}{m}$

$$\frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1}{\frac{1+\cos a}{\sin a}} = \frac{1}{\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\text{tga}}} = \frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} = \frac{x_1x_2}{x_2+x_1} = \frac{\frac{p}{m}}{p} = \frac{1}{m}$$

Vậy: $x_1 = \frac{2m}{m^2+1}$, $x_2 = \frac{2m}{m^2-1}$, $\frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1}{m}$

Ta có: $\frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow \text{tg}\frac{a}{2} = \frac{1}{m}$

$$\Leftrightarrow m = \text{cotg}\frac{a}{2}$$

3. Theo câu 1, ta có: $p(m^4-1) = 4m^3$

$\Rightarrow pm(m^4-1) = 4m^4$ (nhân 2 vế cho m)

$\Rightarrow -\frac{1}{2}(m^4-1) = 4m^4$ (vì $2pm + 1 = 0 \Leftrightarrow pm = -\frac{1}{2}$)

$\Rightarrow 1 - m^4 = 8m^4$

$\Rightarrow m^4 = \frac{1}{9} \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Theo câu 2, thì: $\text{cotg}\frac{a}{2} = m$

nên: $\text{cotg}\frac{a}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \text{cotg}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow a = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

Vậy: $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

4. Theo câu 2 thì: $x_1 = \frac{2m}{m^2+1} \Leftrightarrow x_1m^2 - 2m + x_1 = 0$

- Nếu $x_1 = 0$ thì: $m = 0$
- Nếu $x_1 \neq 0$ thì: $\Delta' = 1 - x_1^2$.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x_1^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x_1 \leq 1$;

Khi đó ta có: $m = \frac{1}{x_1}\left(1 \pm \sqrt{1 - x_1^2}\right)$

Áp dụng với $x_1 = \frac{1}{2}$ thì ta có: $m = 2\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \pm \sqrt{3}$ mà $\sin a = x_1$ nên

$$\sin a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{hay} \quad a = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{hay} \quad \frac{a}{2} = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{12} \quad \text{hay} \quad \operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \operatorname{cotg}\frac{5\pi}{12}$$

Vì $m = \operatorname{cotg}\frac{a}{2}$, ta suy ra:

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}, \quad \operatorname{cotg}\frac{5\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \quad \left(\text{vì } \operatorname{cotg}\frac{\pi}{12} > \operatorname{cotg}\frac{5\pi}{12}\right)$$

Vậy: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$ và $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$.

Đề 2.46

Cho trước các số a, b, c, α, β, γ. Giải phương trình:

$$(b - c)\operatorname{tg}(x + \alpha) + (c - a)\operatorname{tg}(x + \beta) + (a - b)\operatorname{tg}(x + \gamma) = 0.$$

Giải

Điều kiện: $\cos(x + \alpha) \neq 0$, $\cos(x + \beta) \neq 0$ và $\cos(x + \gamma) \neq 0$

Phương trình được viết thành:

$$a[\operatorname{tg}(x + \gamma) - \operatorname{tg}(x + \beta)] + b[\operatorname{tg}(x + \alpha) - \operatorname{tg}(x + \gamma)] + c[\operatorname{tg}(x + \beta) - \operatorname{tg}(x + \alpha)] = 0$$

$$\Leftrightarrow a.\frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos(x + \gamma)\cos(x + \beta)} + b.\frac{\sin(\alpha - \gamma)}{\cos(x + \alpha).\cos(x + \gamma)} + c.\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(x + \beta)\cos(x + \alpha)} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\sin(\gamma - \beta).\cos(x + \alpha) + b\sin(\alpha - \gamma)\cos(x + \beta) + c\sin(\beta - \alpha)\cos(x + \gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow a\sin(\gamma - \beta)[\cos\alpha\cos x - \sin\alpha\sin x] + b\sin(\alpha - \gamma)[\cos\beta\cos x - \sin\beta\sin x] +$$
$$+ c\sin(\beta - \alpha).[\cos\gamma\cos x - \sin\gamma\sin x] = 0$$

$$\Leftrightarrow [a\sin(\gamma - \beta)\cos\alpha + b\sin(\alpha - \gamma)\cos\beta + c\sin(\beta - \alpha)\cos\gamma]\cos x -$$
$$- [a\sin(\gamma - \beta)\sin\alpha + b\sin(\alpha - \gamma)\sin\beta + c\sin(\beta - \alpha)\sin\gamma]\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow A\cos x - B\sin x = 0$$

Với $A = a\sin(\gamma - \beta)\cos\alpha + b\sin(\alpha - \gamma)\cos\beta + c\sin(\beta - \alpha)\cos\gamma$

$B = a\sin(\gamma - \beta)\sin\alpha + b\sin(\alpha - \gamma)\sin\beta + c\sin(\beta - \alpha)\sin\gamma$

- Nếu $A \neq 0$, $B = 0$: phương trình cho ta: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

– Nếu $A = 0, B \neq 0$: phương trình cho ta: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

– Nếu $A \neq 0, B \neq 0$: phương trình cho ta: $\operatorname{tg}x = \frac{A}{B} \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}\left(\frac{A}{B}\right) + k\pi$.

Đề 2.47

Giải và biện luận theo tham số p và m phương trình sau:

$$\cos^2 x + 2m\sin x - p = 0.$$

Giải

Đặt $t = \sin x$ thì $-1 \le t \le 1$ và phương trình được viết thành:

$$1 - t^2 + 2mt - p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 2mt + p - 1 = 0 \qquad (*)$$

Ta có: $\Delta' = m^2 - p + 1$

$f(1) = p - 2m, \qquad f(-1) = p + 2m$

$\frac{S}{2} - 1 = m - 1, \qquad \frac{S}{2} + 1 = m + 1$

Ta chia ra 3 trường hợp để xét như sau:

- *Trường hợp 1:* $m = 0$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow \quad t^2 = 1 - p \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = 1 - p$

Ta có: $m = 0, p < 0 \vee p > 1$: phương trình vô nghiệm

(vì $p < 0$ thì $1 - p > 1$, $p > 1$ thì $1 - p < 0$)

$m = 0, 0 \le p \le 1$: $\sin x = \pm\sqrt{1-p} \equiv \sin(\pm\alpha)$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm\alpha + k2\pi, \quad x = \pi \pm \alpha + k2\pi$

- *Trường hợp 2:* $m > 0$ (thì $-2m < 2m \le m^2 + 1$)

– Nếu $p < -2m$, thì có: $\Delta' = m^2 + 1 - p > 0$ (vì $m^2 + 1 > -2m > p$)

$f(1) = p - 2m < 0$ (do $m > 0$ thì $p < -2m < 0$)

$f(-1) = p + 2m < 0$ (vì $p < -2m$)

nên: $t_1 < -1 < 1 < t_2$: phương trình vô nghiệm

– Nếu $-2m < p < 2m$, thì có: $f(1) = p - 2m < 0$,

$f(-1) = p + 2m > 0$

nên: $-1 < t_1 < 1 < t_2$ chỉ nhận $t = t_1 \Leftrightarrow \sin x = m - \sqrt{m^2 + 1 - p}$

– Nếu $2m < p < m^2 + 1$, thì ta có: $\Delta' = m^2 + 1 - p > 0$

$f(1) = p - 2m > 0$,

$f(-1) = p + 2m > 0$ (vì $p > 2m > 0$)

+Với $m > 1$: $\frac{S}{2} - 1 = m - 1 > 0$

Do đó: $1 < t_1 < t_2$: phương trình vô nghiệm.

+Với $0 < m \le 1$: $\frac{s}{2} - 1 = m - 1 \le 0$, $\frac{s}{2} + 1 = m + 1 > 0$

Do đó: $-1 < t_1 < t_2 < 1$; nhận nghiệm $\sin x = m \pm \sqrt{m^2 + 1 - p}$.

- Nếu $p > m^2 + 1$: thì $\Delta' < 0$ nên phương trình vô nghiệm.
- Nếu $p = m^2 + 1$: thì $\Delta' = 0$ cho ta $t_1 = t_2 = m$

  +Với $0 < m \le 1$: nhận nghiệm $\sin x = m$.

  +Với $m > 1$: phương trình vô nghiệm.
- Nếu $p = 2m$: thì $f(1) = 0$ nên có $t_1 = 1$, $t_2 = 2m - 1$

  +Với $0 < m \le 1$: nhận nghiệm $\sin x = 1$, $\sin x = 2m - 1$.

  +Với $m > 1$: chỉ nhận nghiệm $\sin x = 1$ (vì $2m - 1 > 1$).
- Nếu $p = -2m$: thì $f(-1) = 0$ nên có $t_1 = -1$, $t_2 = 2m + 1 > 1$ (do $m > 0$) chỉ nhận nghiệm $\sin x = -1$.

• *Trường hợp 3:* $m < 0$ (thì $m^2 + 1 \ge -2m > 2m$)

- Nếu $p < 2m$: thì $f(1) = p - 2m < 0$, $f(-1) = p + 2m < 0$

  nên $t_1 < -1 < 1 < t_2$: phương trình vô nghiệm.
- Nếu $2m < p < -2m$: thì $f(1) > 0$, $f(-1) < 0$

  nên $t_1 < -1 < t_2 < 1$; do đó chỉ nhận nghiệm: $\sin x = t_2 = m + \sqrt{m^2 + 1 - p}$
- Nếu $-2m < p < m^2 + 1$: thì $\Delta' > 0$, $f(1) > 0$, $f(-1) > 0$

  $$\frac{s}{2} - 1 = m - 1 < 0.$$

  +Với $m < -1$: có thêm $\frac{s}{2} + 1 = m + 1 < 0$ nên $t_1 < t_2 < -1$: phương trình vô nghiệm

  +Với $-1 \le m < 0$ thì $\frac{s}{2} + 1 \ge 0$ nên có: $-1 < t_1 < t_2 < 1$

  nhận nghiệm $\sin x = m \pm \sqrt{m^2 + 1 - p}$.
- Nếu $p > m^2 + 1$: $\Delta' < 0$: phương trình vô nghiệm.
- Nếu $p = m^2 + 1$: $\Delta' = 0$ cho $t_1 = t_2 = m$

  +Với $m < -1$: vô nghiệm.

  +Với $-1 \le m < 0$: nhận nghiệm $\sin x = m$.
- Nếu $p = 2m$: $t_1 = 1$, $t_2 = 2m - 1$ ($t_2 < -1$ vì $m < 0$) chỉ nhận $\sin x = 1$
- Nếu $p = -2m$: $t_1 = -1$, $t_2 = 2m + 1$

  +Với $m < -1$: chỉ nhận $\sin x = -1$ (vì $t_2 < -1$).

  +Với $-1 \le m < 0$: nhận $\sin x = -1$, $\sin x = 2m + 1$.

Đề 2.48

Giải và biện luận theo các tham số a và b phương trình:

$$\cos 2bx + \cos ax = 1 + \cos(a + 2b)x.$$

Giải

Phương trình được viết thành:

$$2\cos\left(b + \frac{a}{2}\right)x\cos\left(b - \frac{a}{2}\right)x = 2\cos^2\left(b + \frac{a}{2}\right)x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(b + \frac{a}{2}\right)x\left[\cos\left(b - \frac{a}{2}\right)x - \cos\left(b + \frac{a}{2}\right)x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(b + \frac{a}{2}\right)x.\sin bx \sin\left(\frac{a}{2}x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(b + \frac{a}{2}\right)x = 0 \quad \text{hay} \quad \sin bx = 0 \quad \text{hay} \quad \sin\frac{a}{2}x = 0$$

- Với $\cos\left(b + \frac{a}{2}\right)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(b + \frac{a}{2}\right)x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

  $\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2b + a} + \frac{k2\pi}{2b + a}$ (với $a + 2b \neq 0$)

- Với $\sin bx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad bx = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\frac{\pi}{b}$ (với $b \neq 0$)

- Với $\sin\frac{a}{2}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{2}x = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\frac{2\pi}{a}$ (với $a \neq 0$)

Vậy ta có kết quả như sau:

- Nếu $a = b = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$ là nghiệm (thế trực tiếp vào phương trình).
- Nếu $a = 0, b \neq 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$ là nghiệm.
- Nếu $a \neq 0, b = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$ là nghiệm.
- Nếu $a \neq 0, b \neq 0, a + 2b = 0$: $x = k\frac{\pi}{b}$, $x = k\frac{2\pi}{a}$.
- Nếu $a \neq 0, b \neq 0, a + 2b \neq 0$: $x = k\frac{\pi}{b}$, $x = k\frac{2\pi}{a}$, $x = \frac{\pi}{a + 2b} + k\frac{2\pi}{a + 2b}$.

§6. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

Các dạng không mẫu mực của phương trình lượng giác là rất đa dạng, do đó không thể có một phương pháp chung để tất cả các bài toán loại này. Sau đây là một số cách giải thông dụng:

1. ***Phương pháp "nghiệm duy nhất"***

Xét phương trình dạng: $f(x) = 0$

Nếu có α thỏa $f(\alpha) = 0$ và $f(x)$ là hàm số đơn điệu thì $x = \alpha$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. ***Phương pháp "so sánh"***

Xét phương trình dạng: $fx) = g(x)$, với $x \in D$

Nếu tồn tại hằng số k thỏa: $f(x) \le k \le g(x)$, $\forall x \in D$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ tương đương với hệ sau: $\begin{cases} f(x) = k \\ g(x) = k \end{cases}$

3. ***Phương pháp "tổng bình phương"***

Xét phương trình dạng $f(x) = 0$

Nếu tồn tại $f_1(x)$ và $f_2(x)$ sao cho $f(x) = f_1^2(x) + f_2^2(x)$ thì phương trình $f(x) = 0$ tương đương với hệ sau: $\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$

Nhận xét: Cách giải trên vẫn áp dụng cho $f(x) = f_1^2(x) + ... + f_n^2(x)$.

Đề 2.49

Giải phương trình: $\mathbf{x + \sin x = 0.}$

Giải

Xét $f(x) = x + \sin x$ với $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f(0) = 0$ (vì $\sin 0 = 0$)

$f'(x) = 1 + \cos x \ge 0$, $\forall x$ (vì $\cos x \ge -1$) nên $f(x)$ là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$.

Do đó $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Đề 2.50

Giải phương trình: $\mathbf{\cos x + \sin x = \sqrt{2}\,(2 - \sin^3 2x).}$

Giải

Ta có: $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

Trong khi đó: $\sqrt{2}\,(2 - \sin^3 2x) \ge \sqrt{2}$ (vì $\sin^3 2x \le 1$)

nên: $\cos x + \sin x \le \sqrt{2} \le \sqrt{2}\,(2 - \sin^3 2x)$

Do đó phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \cos x + \sin x = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}(2 - \sin^3 2x) = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 & (1) \\ \sin^3 2x = 1 & (2) \end{cases}$$

Với (1) $\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

Suy ra: $\quad 2x = \frac{\pi}{2} + k4\pi \quad \Rightarrow \quad \sin 2x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ nên thỏa (2)

Vậy: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ là nghiệm.

Đề 2.51

Giải phương trình: $\quad (\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x.$

Giải

Ta có: $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = (-2\sin 3x \sin x)^2 = 4\sin^2 3x.\sin^2 x \le 4$

$5 + \sin 3x \ge 4 \quad$ (vì $\sin 3x \ge -1$)

nên: $\quad (\cos 4x - \cos 2x)^2 \le 4 \le 5 + \sin 3x$

Do đó phương trình trở thành: $\begin{cases} (\cos 4x - \cos 2x)^2 = 4 & (1) \\ 5 + \sin 3x = 4 & (2) \end{cases}$

Với (2) $\Leftrightarrow \sin 3x = -1$

Suy ra: $\sin^2 3x = 1$. Thế vào (1) thì:

$$\sin^2 3x.\sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos x = 0$$

Do đó: $\quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$

Với: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad$ thì $\quad \sin 3x = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ (thỏa)

$x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad$ thì $\quad \sin 3x = \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$ (không thỏa)

Vậy: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ là nghiệm.

Đề 2.52

Giải phương trình: $\quad \cos^5 x + \sin^6 x = 1.$

Giải

Vì $|\cos x| \le 1$, $|\sin x| \le 1$ nên ta có: $\quad \cos^5 x \le \cos^2 x \quad$ và $\quad \sin^6 x \le \sin^2 x$

Suy ra: $\quad \cos^5 x + \sin^6 x \le \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Do đó phương trình tương đương với: $\begin{cases} \cos^5 x = \cos^2 x & (1) \\ \sin^6 x = \sin^2 x & (2) \end{cases}$

Với (1) $\Leftrightarrow \quad \cos^2 x(\cos^3 x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \vee \cos x = 1$

Với $\cos x = 0$ thì $\sin^2 x = 1$ làm (2) thỏa.

Với cosx = 1 thì $\sin^2 x = 0$ làm (2) thỏa.

Vậy nhận nghiệm: $\cos x = 0 \vee \cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k2\pi$.

Đề 2.53

Tìm a sao cho phương trình sau có nghiệm:

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = (a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6) + 7 + \sin 3x.$$

Giải

Xét hàm số: $y = (a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6)$

$\Leftrightarrow \quad y = t(t + 3) \quad$ với $t = a^2 + 4a + 3 = (a - 2)^2 - 1 \geq -1$

Ta có: $\quad y' = 2t + 3 > 0, \forall t \geq -1$ nên y là hàm số tăng trên $[-1, \infty)$

Suy ra: $\forall t \geq -1$ thì $y(t) \geq y(-1) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) \geq -2$

Do đó, ta có:

$$(a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6) + 7 + \sin 3x \geq -2 + 7 - 1 = 4,$$

trong khi: $\quad (\cos 4x - \cos 2x)^2 = (-2\sin 3x \sin x)^2 = 4\sin^2 3x \sin^2 x \leq 4$

nên: $\quad (\cos 4x - \cos 2x)^2 \leq 4 \leq (a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6) + 7 + \sin 3x$

Vậy: phương trình có nghiệm khi 2 vế đều bằng 4, lúc đó:

$$(a^2 + 4a + 3)(a^2 + 4a + 6) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 4a + 3 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 4a + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2,$$

khi đó phương trình trở thành hệ: $\begin{cases} (\cos 4x - \cos 2x)^2 = 4 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$

có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Kết luận: phương trình có nghiệm khi a = –2.

Đề 2.54

Tìm x, y thỏa phương trình:

$$\left(\sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = \frac{7}{2} - 2\sin y - \sin^2 y.$$

Giải

Ta có: Vế phải $= \frac{9}{2} - (1 + 2\sin y + \sin^2 y) = \frac{9}{2} - (1 + \sin y)^2 \leq \frac{9}{2}$

Vế trái $= \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} - 4$

$$= (\sin^4 x + \cos^4 x)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}\right) - 4$$

$$\text{VT} = (1 - 2\sin^2 x\cos^2 x)\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4}\right) - 4$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) - 4$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 + 16) - 4 = \frac{9}{2} \quad (\text{vì } 0 \leq \sin^4 2x \leq \sin^2 2x \leq 1)$$

Do đó phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \text{Vế trái } = \dfrac{9}{2} \\ \text{Vế phải } = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 2x = 1 \\ \sin y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin y = -1 \end{cases}$$

Vậy: $x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ là nghiệm.

Đề 2.55

Giải phương trình: $\sin^2 x + \text{tg}^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\text{tg}x + \frac{15}{4} = 0$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$\left(\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x + \frac{3}{4}\right) + (\text{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\text{tg}x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (\text{tg}x - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ \text{tg}x - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{tg}x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Vậy $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ là nghiệm.

Đề 2.56

Tìm x, y thỏa phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y) = \frac{9}{4}$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}(1-\cos 2y)+1-\cos^2(x+y)=\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x+\cos 2y+2\cos^2(x+y)+\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(x+y)\cos(x-y)+2\cos^2(x+y)+\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2(x+y)+\cos(x-y)\cos(x+y)+\frac{1}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y)\right]^2+\frac{1}{4}\sin^2(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y)=0 & (1)\\ \sin(x-y)=0 & (2)\end{cases}$$

Với (2) $\Leftrightarrow \cos(x-y)=\pm 1$

- Xét $\cos(x-y)=1$: Thế vào (1), ta có: $\cos(x+y)=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$ nên hệ cho ta:

$$\begin{cases}\cos(x-y)=1\\ \cos(x+y)=\cos\frac{2\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=k2\pi\ (k\in Z)\\ x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+m2\pi\ (m\in Z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+(k+m)\pi\\ y=\frac{\pi}{3}+(m-k)\pi\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+(k+m)\pi\\ y=-\frac{\pi}{3}+(m-k)\pi\end{cases}$$

- Xét $\cos(x-y)=-1$: Thế vào (1), ta có: $\cos(x+y)=\frac{1}{2}$ nên hệ cho ta:

$$\begin{cases}\cos(x-y)=-1\\ \cos(x+y)=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=\pi+k2\pi\\ x+y=\pm\frac{\pi}{3}+m2\pi\end{cases} (k\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{2\pi}{3}+(k+m)\pi\\ y=-\frac{\pi}{3}+(m-k)\pi\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+(k+m)\pi\\ y=-\frac{2\pi}{3}+(m-k)\pi\end{cases}$$

Đề 2.57

Tìm x, y thỏa phương trình: $x^2+4x\cos xy+4=0.$

Giải

Phương trình được viết thành:

$$(x^2 + 4x\cos xy + 4\cos^2 xy) + (4 - 4\cos^2 xy) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 2\cos xy)^2 + 4\sin^2 xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2\cos xy = 0 & (1) \\ 2\sin xy = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow$ $\sin xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos xy = \pm 1$

- Với $\cos xy = 1$: Thế vào (1) thì có $x = -2$

Suy ra: $\cos xy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(-2y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2y = 1$

$\Leftrightarrow \quad 2y = k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad y = k\pi$

- Với $\cos xy = -1$. Thế vào (1) thì có $x = 2$

Suy ra: $\cos xy = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2y = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = \pi + k2\pi$

$\Leftrightarrow \quad y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

Vậy: $\left(x = 2, y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ hay $(x = -2,\ y = k\pi)$.

Đề 2.58

Tìm x, y thỏa phương trình sau:

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y.$$

Giải

Ta có: Vế phải $= 12 + \dfrac{1}{2}\sin y \le 12 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{25}{2}$ (vì $\sin y \le 1$)

Vế trái $= \sin^4 x + \dfrac{1}{\sin^4 x} + 2 + \cos^4 x + \dfrac{1}{\cos^4 x} + 2$

$= (\sin^4 x + \cos^4 x)\left(\dfrac{1}{\sin^4 x} + \dfrac{1}{\cos^4 x}\right) + 4$

Theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có:

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \le 2(\sin^4 x + \cos^4 x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin^4 x + \cos^4 x \ge \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Cũng theo bất đẳng thức Svac-xơ thì:

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \le 2\left(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)^2 = \frac{8}{\sin^4 2x} \ge 8 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \ge \frac{1}{2} + 8 + 4 = \frac{25}{2}$$

Do đó phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = \dfrac{25}{2} & \text{(i)} \\ 12 + \dfrac{1}{2}\sin y = \dfrac{25}{2} & \text{(ii)} \end{cases}$$

Ta có: (ii) $\Leftrightarrow \quad \sin y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(1) trở thành đẳng thức} \\ \text{(2) trở thành đẳng thức} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \cos^2 x \\ \sin^2 x = \cos^2 x \text{ và } \sin^4 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \cos^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}x = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + m\pi$$

Vậy: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + m\pi$, $\quad y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad$ (với $m \in Z$, $k \in Z$).

Đề 2.59

Tìm x, y thỏa phương trình: $\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \dfrac{3}{2}$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \left[2\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - 1\right] = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 0 & (1) \\ \sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \pm 1$

- Với $\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x-y}{2} = k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x - y = k4\pi \qquad (3)$

Thế (3) vào (1) thì: $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + m2\pi$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + y = \frac{2\pi}{3} + m4\pi & (4) \\ x + y = -\frac{2\pi}{3} + m4\pi & (5) \end{array}\right.$$

Từ (3) và (4), ta có: $x = \frac{\pi}{3} + (k+m)2\pi, \quad y = \frac{\pi}{3} + (m-k)2\pi$

Từ (3) và (5), ta có: $x = -\frac{\pi}{3} + (k+m)2\pi, \quad y = -\frac{\pi}{3} + (m-k)2\pi$

- Với $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{2} = \pi + n2\pi$

$$\Leftrightarrow \quad x - y = 2\pi + n4\pi \qquad (6)$$

Thế (6) vào (1), ta có: $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2l\pi$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + y = \frac{4\pi}{3} + 4l\pi & (7) \\ x + y = -\frac{4\pi}{3} + 4l\pi & (8) \end{array}\right.$$

Từ (6) và (7), ta được: $x = \frac{5\pi}{3} + (n+l)2\pi, \quad y = -\frac{\pi}{3} + (l-n)2\pi$

Từ (6) và (8), ta được: $x = \frac{\pi}{3} + (n+l)2\pi, \quad y = -\frac{5\pi}{3} + (l-n)2\pi$

Kết luận: $x = \frac{\pi}{3} + (k+m)2\pi$ và $y = \frac{\pi}{3} + (m-k)2\pi$

$x = -\frac{\pi}{3} + (k+m)2\pi$ và $y = -\frac{\pi}{3} + (m-k)2\pi$

$x = \frac{5\pi}{3} + (n+l)2\pi$ và $y = -\frac{\pi}{3} + (l-n)2\pi$

$x = \frac{\pi}{3} + (n+l)2\pi$, $y = -\frac{5\pi}{3} + (l-n)2\pi$.

Đề 2.60

Giải phương trình: $\sin x = x^2 + x + 1$.

Giải

- Xét $-1 \le x \le 0$:

Với $-1 \le x \le 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x \le 0$

còn $x^2 + x + 1 > 0$ (vì $\Delta = 1 - 4 < 0$)

Do đó: $x^2 + x + 1 > \sin x$ nên phương trình không thỏa.

- Xét $x < -1 \vee x > 0$

Ta có: $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$$\left(\text{vì } x < -1 \vee x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \vee x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}\right)$$

nên suy ra: $x^2 + x + 1 > 1 \geq \sin x$ và phương trình cũng không thỏa.

Vậy: phương trình vô nghiệm.

Đề 2.61

Tìm x, y thỏa phương trình: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{cotg}^2(x + y) = 1$.

Giải

Ta có: $\operatorname{cotg}(x + y) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x + y)} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}x.\operatorname{cotg}(x + y) + \operatorname{cotg}(x + y).\operatorname{tg}y + \operatorname{tg}y\operatorname{tg}x = 1 \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có:

$$\operatorname{tg}x.\operatorname{cqtg}(x + y) + \operatorname{cotg}(x + y).\operatorname{tg}y + \operatorname{tg}y\operatorname{tg}x \leq$$

$$\leq 12 + \frac{1}{2}\sin y \leq 12 + \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{cotg}^2(x + y) \qquad (\text{do}(1))$$

Do đó phương trình $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{cotg}^2(x + y) = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{cotg}(x + y)}{\operatorname{tg}x} = \frac{\operatorname{tg}y}{\operatorname{cotg}(x + y)} = \frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y}$$

(điều kiện để bất đẳng thức Svac-xơ trở thành đẳng thức)

$$\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{cotg}(x + y)}{\operatorname{tg}x} = \frac{\operatorname{tg}y}{\operatorname{cotg}(x + y)} = \frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y} = \frac{\operatorname{cotg}(x + y) + \operatorname{tg}y + \operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}(x + y) + \operatorname{tg}y} = 1$$

(tính chất tỷ lệ thức)

Suy ra: $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}y = \operatorname{cotg}(x + y)$

Thế vào (1) thì suy ra: $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}y = \operatorname{cotg}(x + y) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ y = -\frac{\pi}{6} + m\pi\right)$$

$$\text{hay} \quad \left(x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ y = \frac{\pi}{6} + m\pi\right) \quad (\text{với } m \in Z,\ k \in Z)$$

Đề 2.62

Giải phương trình: $\mathbf{5x^2 + 2x + 3 = 2\sin x}$.

Giải

Ta có: $5x^2 + 2x + 3 = 5\left(x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}\right) = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{14}{5} \geq \frac{14}{5} > 2$.

Suy ra: $5x^2 + 2x + 3 > 2 \geq 2\sin x$ với mọi x.

Vậy: phương trình vô nghiệm.

Đề 2.63

Tìm x, y thỏa phương trình: $\mathbf{tg^4x + tg^4y + 2cotg^2x\, cotg^2y = 3 + \sin^2(x + y)}$.

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $tg^4x + tg^4y \geq 2tg^2x tg^2y$

$$\Rightarrow \quad tg^4x + tg^4y + 2cotg^2x\, cotg^2y \geq 2(tg^2x tg^2y + cotg^2x\, cotg^2y)$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi thì: $tg^2x tg^2y + cotg^2x\, cotg^2y \geq 2$

nên suy ra: $tg^4x + tg^4y + 2cotg^2x\, cotg^2y \geq 4$ (1)

Ta lại có: $3 + \sin^2(x + y) \leq 4$ (2)

Từ (1) và (2) ta được phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} tg^4x + tg^4y + 2cotg^2x cotg^2y = 4 & (3) \\ 3 + \sin^2(x + y) = 4 & (4) \end{cases}$$

Ta có: (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} tg^4x = tg^4y \\ tg^2x tg^2y = cotg^2x cotg^2y \end{cases}$

(bất đẳng thức Côsi trở thành đẳng thức)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tg^2x = tg^2y \\ tg^2x tg^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad tg^2x = tg^2y = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad tgx = \pm 1 \text{ và } tgy = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ và } y = \pm\frac{\pi}{4} + m\pi$$

Với: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + m\pi$ thì (4) thỏa

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = -\frac{\pi}{4} + m\pi$ thì (4) thỏa

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = -\frac{\pi}{4} + m\pi$ thì (4) không thỏa

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + m\pi$ thì (4) không thỏa

Kết luận: $\left(x = \frac{\pi}{4} + k\pi, y = \frac{\pi}{4} + m\pi\right)$ hay $\left(x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, y = -\frac{\pi}{4} + m\pi\right)$.

Đề 2.64

Tìm m để phương trình: $1 + \sin^2 mx = \cos x$ có nghiệm.

Giải

Ta có: $1 + \sin^2 mx \geq 1 \geq \cos x$ nên phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 1 + \sin^2 mx = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin mx = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx = k\pi \\ x = n2\pi \end{cases} \quad (k \in Z, n \in Z)$$

Phương trình có nghiệm khi: $\frac{k\pi}{m} = n2\pi$ (với $m \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \quad k = 2mn \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{k}{2n}$$

Hơn nữa khi m = 0 thì phương trình trở thành: $\cos x = 1$ (có nghiệm)

Do đó: phương trình có nghiệm khi: $m = \frac{k}{2n}$ (với $k \in Z, n \in Z \setminus \{0\}$.

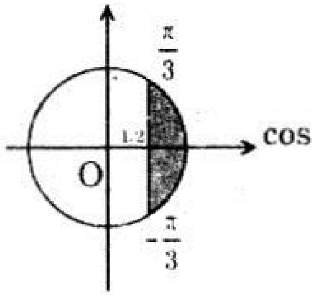
Đề 2.65

Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + \cos x = 0$ **b)** $3x^2 = 1 - 2\cos x$

c) $2\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 2^x + 2^{-x}$ **d)** $2\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{6} = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Giải



a) Xét: $-1 \leq x \leq 1$ thì: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos x > 0$

Suy ra: $x^2 + \cos x > 0$ (phương trình không thỏa)

Xét: $x < -1 \vee x > 1$ thì: $x^2 > 1$

nên: $x^2 + \cos x > 1 + \cos x \geq 0$ (vì $\cos x \geq -1$)

$\Rightarrow$ $x^2 + \cos x > 0$ (phương trình không thỏa)

Vậy: phương trình $x^2 + \cos x = 0$ vô nghiệm.

b) Xét: $\cos x > \frac{1}{2}$ thì: $1 - 2\cos x < 0 < 3x^2$ nên phương trình: $1 - 2\cos x = 3x^2$ không thỏa.

Xét: $\cos x \leq \frac{1}{2}$ thì $|x| \geq \frac{\pi}{3}$ nên: $3x^2 > 3.\frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{3} > 3$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 > 3 \geq 1 - 2\cos x \quad \Rightarrow \quad 3x^2 > 1 - 2\cos x$$

Do đó phương trình: $3x^2 = 1 - 2\cos x$ không thỏa.

Kết luận: $3x^2 = 1 - 2\cos x$ là vô nghiệm.

c) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x.2^{-x}} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^x + 2^{-x} \geq 2 \geq 2\cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

Do đó phương trình $2^x + 2^{-x} = 2\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ trở thành: $\begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 2 & (1) \\ 2\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 2 & (2) \end{cases}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \quad 2^x = 2^{-x} = 1$ (do bất đẳng thức Côsi)

$\Leftrightarrow \quad x = 0$

Thế x = 0 vào (2) thì thỏa mãn.

Vậy: x = 0 là nghiệm của phương trình.

d) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2.\frac{1}{x^2}} = 2$

nên suy ra: $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \geq 2\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{6}$

Do đó phương trình $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{6}$ trở thành:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 & (1) \\ 2\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{6} = 2 & (2) \end{cases}$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 1$ (bất đẳng thức Côsi)

$\Leftrightarrow \quad x = \pm 1$

Với $x = \pm 1$ thì $\left.\begin{array}{l} \sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{1}{2} < 1 \\ \sin^2\frac{x}{6} = \sin^2\frac{1}{6} < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{6} < 2$

Do đó $x = \pm 1$ không thỏa (2)

Vậy phương trình vô nghiệm.

Đề 2.66

Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + (x+1)\sin\frac{\pi x}{6} = \frac{3+x}{2}$ **(với $-2 \leq x \leq 2$)**

b) $x = \sin\pi\frac{x+1}{3}.\sin\pi\frac{1-x}{3}$ **(với $0 \leq x \leq 1$).**

Giải

a) Phương trình được viết thành: $x^2 - \frac{3+x}{2} + (x+1)\sin\frac{\pi x}{6} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - 3 + 2(x+1)\sin\frac{\pi x}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right) + 2(x+1)\sin\frac{\pi x}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)\left[2x - 3 + 2\sin\frac{\pi x}{6}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{hay} \quad 2x - 3 + 2\sin\frac{\pi x}{6} = 0 \qquad (1)$$

Xét hàm số: $f(x) = 2x - 3 + 2\sin\frac{\pi x}{6}$, $-2 \le x \le 0$

Đạo hàm: $f'(x) = 2 + 2.\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi x}{6} = 2 + \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi x}{6} > 0$

(vì $-2 \le x \le 2 \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi x}{6} \le \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{\pi x}{6} > 0$)

Do đó f(x) là hàm số tăng trên $-2 \le x \le 2$

hơn nữa: $f(1) = 2 - 3 + 2.\frac{1}{2} = 0.$

Suy ra (1) chỉ có nghiệm là $x = 1$ (trong $-2 \le x \le 2$)

Kết luận: $x = 1$, $x = -1$ là nghiệm của phương trình.

b) Phương trình được viết thành:

$$x = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi x}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right] \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \cos\frac{2\pi x}{3} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x - 1 = 2\cos\frac{2\pi x}{3}$$

Với: $1 > x > \frac{1}{2}$ thì: $4x - 1 > 1$

còn $\frac{\pi}{3} < \frac{2\pi x}{3} < \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} < \cos\frac{2\pi x}{3} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\cos\frac{2\pi x}{3} < 1$

nên ta có: $4x - 1 > 2\cos\frac{2\pi x}{3}$ (phương trình không thỏa)

Với: $0 \le x < \frac{1}{2}$ thì: $4x - 1 < 1$

còn $0 < \frac{2\pi x}{3} < \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{2\pi x}{3} > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\cos\frac{2\pi x}{3} > 1$

nên: $4x - 1 < 2\cos\frac{2\pi x}{3}$: phương trình không thỏa

hơn nữa; thế $x = \frac{1}{2}$ thì phương trình nghiệm đúng.

Do vậy: $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất.

Đề 2.67

Giải các phương trình sau (với x, y là nghiệm)

a) $\mathbf{tg^2x + 2(\sin y + \cos y)\,tgx + 2 = 0}$

b) $\mathbf{3 + \cos 2y = 2\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x)\cos y.}$

Giải

a) Phương trình được viết thành:

$$(tgx + (\sin y + \cos y))^2 + 2 - (\sin y + \cos y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (tgx + \sin y + \cos y)^2 + 1 - 2\sin y\cos y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (tgx + \sin y + \cos y)^2 + (\sin y - \cos y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} tgx + \sin y + \cos y = 0 & (1) \\ \sin y - \cos y = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \quad \sin y = \cos y \quad \Leftrightarrow \quad tgy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\pi}{4} + k\pi$

- Với $y = \frac{\pi}{4} + k2\pi$: thế vào (1), ta được:

$$tgx + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tgx = -\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = arctg(-\sqrt{2}) + m\pi \ (m \in \mathbb{Z})$$

- Với $y = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$: thế vào (1), ta được:

$$tgx - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \quad tgx = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = arctg\sqrt{2} + m\pi$$

Kết luận: $(x = arctg\sqrt{2} + m\pi,\ y = \frac{5\pi}{4} + k2\pi)$

hay $(x = arctg(-\sqrt{2}) + m\pi,\ y = \frac{\pi}{4} + k2\pi)$ (với $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$).

b) Phương trình được viết thành:

$$2 + 2\cos^2 y = 2\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x)\cos y$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 y - 2\sqrt{2}\,(\sin x + \cos x)\cos y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 y - \sqrt{2}\,(\sin x + \cos x)\cos y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)\right]^2 + 1 - \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)\right]^2 + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = 0 & (1) \\ \sin x + \cos x = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

($x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ có 2 biểu diễn là $\frac{\pi}{4}$ và $\frac{5\pi}{4}$)

- Với $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$: thế vào (1) thì:

$$\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = m2\pi$$

- Với $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$: thế vào (1) thì:

$$\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pi + m2\pi$$

Kết luận: $\left(x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ y = m2\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z})$

$\left(x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi,\ y = \pi + m2\pi\right)$.

Đề 2.68

Tìm a, b sao cho phương trình sau có nghiệm: $x^2 + 5 = 2(x - 2\cos(ax + b))$

Giải

Phương trình được viết thành: $x^2 - 2x + 5 = -4\cos(ax + b)$

Ta có: $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 \geq 4 \geq -4\cos(ax + b)$

Do đó phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 = 4 \\ -4\cos(ax + b) = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ \cos(ax + b) = -1 \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm khi thỏa:

$$\cos(a + b) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = \pi + k2\pi$$

Vậy: $a + b = \pi + k2\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

§7. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ CHỨA CĂN THỨC VÀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Để giải các phương trình lượng giác có chứa căn thức và giá trị tuyệt đối, cần nắm vững các kiến thức cơ bản sau:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \pm g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$$

$$\sqrt{f^2(x)} = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Đề 2.69

Giải phương trình: $\cos(\pi\sqrt{x}).\cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1$.

Giải

Điều kiện: $x \geq 4$

Phương trình được viết thành:

$$\cos(\pi\sqrt{x} + \pi\sqrt{x-4}) + \cos(\pi\sqrt{x} - \pi\sqrt{x-4}) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\pi\sqrt{x} + \pi\sqrt{x-4}) = 1 \\ \cos(\pi\sqrt{x} - \pi\sqrt{x-4}) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi\sqrt{x} + \pi\sqrt{x-4} = k2\pi & (\text{với } k \in \mathbb{Z},\ k > 0) \\ \pi\sqrt{x} - \pi\sqrt{x-4} = n2\pi & (\text{với } n \in \mathbb{Z},\ n > 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x-4} = 2k \\ \sqrt{x} - \sqrt{x-4} = 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = k + n \\ \sqrt{x-4} = k - n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = i \ (\text{với } i = k + n) \\ \sqrt{x-4} = j \ (\text{với } j = k - n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = i^2 \\ x - 4 = j^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = i^2 \\ x = j^2 + 4 \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm khi: $i^2 = j^2 + 4 \Leftrightarrow i^2 - j^2 = 4$

$$\Leftrightarrow (i + j)(i - j) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} i + j = 4 \\ i - j = 1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} i + j = 2 \\ i - j = 2 \end{cases}$$

(vì $i \pm j$ là số nguyên, $i + j > 0$, $i - j \geq 0$)

$$\Leftrightarrow \left(i = \frac{5}{2},\ j = \frac{3}{2}\right) \text{ hay } (i = 2,\ j = 0)$$

$$\Leftrightarrow (i = 2,\ j = 0) \Leftrightarrow x = 4$$

Kết luận: $x = 4$ là nghiệm.

Đề 2.70

Giải phương trình: $\sin^3x\,(1 + \cot gx) + \cos^3x(1 + tgx) = 2\sqrt{\sin x\cos x}$.

Giải

Điều kiện: $(x \neq k\frac{\pi}{2}$ và $\sin x\cos x \geq 0)$ (*)

Vế trái của phương trình được viết thành:

$$\sin^3x + \cos^3x + \sin^2x\cos x + \cos^2x\sin x =$$
$$= (\sin x + \cos x)(\sin^2x + \cos^2x - \sin x\cos x) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x)$$
$$= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x)$$
$$= \sin x + \cos x$$

nên phương trình trở thành:

$$\sin x + \cos x = 2\sqrt{\sin x\cos x} \Leftrightarrow \begin{cases}(\sin x + \cos x)^2 = 4\sin x\cos x & (1)\\ \sin x + \cos x \geq 0 & (2)\end{cases}$$

Với (1) $\Leftrightarrow$ $1 + 2\sin x\cos x = 4\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow$ $1 = 2\sin x\cos x$ $\Leftrightarrow$ $\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow$ $2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

($x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ có 2 biểu diễn là $\frac{\pi}{4}$ và $\frac{5\pi}{4}$)

- Với $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ thì $\sin x = \cos x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên thỏa (2) và (*)
- Với $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$ thì $\sin x = \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ làm (2) không thỏa.

Kết luận: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ là nghiệm.

Đề 2.71

Giải phương trình: $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x - \cos x}$.

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases}\cos 2x \geq 0\\ 1 - \sin 2x \geq 0\\ \sin x - \cos x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \geq 0\\ (\cos x - \sin x)^2 \geq 0\\ \sin x - \cos x \geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x + \cos x \leq 0\\ \sin x - \cos x \geq 0\end{cases}$$

Phương trình được viết thành:

$$\sqrt{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = 2\sqrt{\sin x - \cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\sin x - \cos x}\left[\sqrt{-(\cos x + \sin x)} + \sqrt{\sin x - \cos x} - 2\right] = 0$$

- Với $\sqrt{\sin x - \cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

+ k chẵn: ta có $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: điều kiện không thỏa

+ k lẻ: ta có $\sin x = \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: điều kiện thỏa

do đó nhận nghiệm: $x = \frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi$

- Với $\sqrt{-(\cos x + \sin x)} + \sqrt{\sin x - \cos x} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{-(\cos x + \sin x)} + \sqrt{\sin x - \cos x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\cos x + \sin x) + \sin x - \cos x + 2\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\cos x + 2\sqrt{\cos 2x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\cos 2x} - \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \quad (\text{vì } \sqrt{\cos 2x} \le 1,\ -\cos x \le 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + k2\pi$$

Lúc đó $\cos x = -1$, $\sin x = 0$ làm thỏa các điều kiện.

Kết luận: $x = \pi + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi$.

Đề 2.71

Giải phương trình: $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 1 + \cos x$.

Giải

Vì: $-1 \le \sin x \le 1$ nên luôn có: $1 \pm \sin x \ge 0$

$\cos x \ge -1$, $\forall x$ nên $1 + \cos x \ge 0$, $\forall x \in R$

Phương trình được viết thành:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}\right)^2 = (1 + \cos x)^2 \\ \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2 - 2\sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 + 2\cos x + \cos^2 x \\ \sin x \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2 - 2\sqrt{\cos^2 x} = 1 + 2\cos x + \cos^2 x \\ \sin x \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos^2 x + 2\cos x + 2|\cos x| - 1 = 0 \quad (*) \\ \sin x \ge 0 \end{cases}$$

Xét: $\cos x \le 0$, thì: $|\cos x| = -\cos x$ nên (1) trở thành:

$$\cos^2 x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = -1 \quad (\text{vì } \cos x \le 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pi + k2\pi \quad (\text{thỏa điều kiện } \sin x \ge 0)$$

Xét: $\cos x > 0$, thì: $|\cos x| = \cos x$ và (1) trở thành:

$$\cos^2 x + 4\cos x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = -2 \pm \sqrt{5}$$

vì ($\cos x > 0$ và $\sin x \ge 0$) nên chỉ nhận $\cos x = \sqrt{5} - 2$

ứng với $\quad x = \arccos(\sqrt{5} - 2) + k2\pi$

Kết luận: $x = \pi + k2\pi$, $x = \arccos(\sqrt{5} - 2) + k2\pi$.

Đề 2.72

Giải phương trình: $\quad \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x.\sqrt{2 - \sin^2 x} = 3$.

Giải

Vì: $0 \le \sin^2 x \le 1$ nên luôn có: $2 - \sin^2 x > 0$

Đặt : $u = \sin x$ và $v = \sqrt{2 - \sin^2 x}$ thì có: $\quad u^2 + v^2 = 2 \qquad (1)$

Phương trình được viết thành: $\quad u + v + uv = 3 \qquad (2)$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \quad (u + v)^2 - 2uv = 2$

$\Leftrightarrow \quad (u + v)^2 - 2(3 - u - v) = 2 \qquad$ (do (2))

$\Leftrightarrow \quad (u + v)^2 + 2(u + v) - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \quad u + v = -4$ hay $u + v = 2$

- Với $u + v = 2$ thì (2) cho $uv = 1$, suy ra:

$$u = v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sqrt{2 - \sin^2 x} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

- Với $u + v = -4$ thì (2) cho $uv = 7$ nên u, v là nghiệm của phương trình: $X^2 + 4X + 7 = 0$ (vì $\Delta' = 4 - 7 < 0$ nên phương trình này vô nghiệm).

Kết luận: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

Đề 2.73

Tìm x, y, thỏa phương trình sau: $\quad \mathrm{tg}^2\pi(x + y) + \mathrm{cotg}^2\pi(x + y) = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2 + 1}} + 1$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+1} \geq 0 \\ \pi(x+y) \neq k\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x + y \neq \dfrac{k}{2} \quad (k \in Z) \end{cases}$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$tg^2\pi(x+y) + cotg^2\pi(x+y) \geq 2\sqrt{tg^2\pi(x+y).cotg^2\pi(x+y)} = 2$$

Ta lại có: $1 + x^2 \geq 2\sqrt{x^2} = 2x \quad (\text{vì } x \geq 0)$

nên: $0 \leq \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\dfrac{2x}{1+x^2}} + 1 \leq 2$

Do đó, phương trình trở thành: $\begin{cases} tg^2\pi(x+y) + cotg^2\pi(x+y) = 2 & (1) \\ \sqrt{\dfrac{2x}{1+x^2}} + 1 = 2 & (2) \end{cases}$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 1 + x^2 = 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$(1) \Leftrightarrow tg^2\pi(x+y) = cotg^2\pi(x+y) = 1$

nên có: $tg^2\pi(1+y) = cotg^2\pi(1+y) = 1$

hay là: $tg^2\pi y = cotg^2\pi y = 1 \Leftrightarrow tg\pi y = \pm 1 \Leftrightarrow \pi y = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$$\Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{4} + k.$$

Vậy: $x = 1, \quad y = \pm\dfrac{1}{4} + k \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z}).$

Đề 2.74

Giải phương trình: $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$\sqrt{1+\sin x} = -\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin x = \cos^2 x \\ -\cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin x = 1 - \sin^2 x \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \sin x = 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \text{ hay } \sin x = -1 \\ \cos x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \quad \text{hay} \quad x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

Đề 2.75

Giải phương trình: $\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0$ **với** $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$\sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{2}\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = \sqrt{2}\cos 3x \quad \Leftrightarrow \quad |\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{2}\cos 3x \quad \Leftrightarrow \quad \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \cos 3x \qquad (*)$$

Với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ thì ta có: $\sin x < 0$ và $\cos x < 0$.

nên ta có: $(*) \Leftrightarrow \quad -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 3x \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = \pm\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + k2\pi$$

- Với $3x = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$

  Vì: $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ nên chỉ nhận: $x = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11\pi}{8}$

- Với $3x = -\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$

  Vì: $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ nên chỉ nhận: $x = -\frac{3\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} = \frac{21\pi}{16}$

Kết luận: $x = \frac{11\pi}{8}$, $x = \frac{21\pi}{16}$.

Đề 2.76

Giải phương trình: $1 - 2\text{cotg}x = \sqrt{\frac{3 + 10\sin^2 x}{\sin^2 x}}$.

Giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq k\pi$.

Phương trình được viết thành:

$$1 - 2\text{cotg}x = \sqrt{\frac{3}{\sin^2 x} + 10} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2\text{cotg}x = \sqrt{3(1 + \text{cotg}^2 x) + 10}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2\text{cotg}x = \sqrt{3\text{cotg}^2 x + 13}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-2\text{cotg}x)^2 = 3\text{cotg}^2x+13\\ 1-2\text{cotg}x > 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4\text{cotg}^2x-4\text{cotg}x+1 = 3\text{cotg}^2x+13\\ \text{cotg}x < \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{cotg}^2x-4\text{cotg}x-12 = 0\\ \text{cotg}x < \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{cotg}x = -2 \text{ hay } \text{cotg}x = 6\\ \text{cotg}x < \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{cotg}x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{arccotg}(-2) + k\pi \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z}).$$

Đề 2.77

Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{\sin x}} + \sqrt{\dfrac{\sin x}{x^2-x-2}} = \dfrac{3}{2}$.

Giải

Điều kiện: $\dfrac{x^2-x-2}{\sin x} > 0$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{\frac{x^2-x-2}{\sin x}} + \sqrt{\frac{\sin x}{x^2-x-2}} \geq 2\sqrt{\frac{x^2-x-2}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x^2-x-2}} = 2$$

nên: $\sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{\sin x}} + \sqrt{\dfrac{\sin x}{x^2-x-2}} > \dfrac{3}{2}$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Đề 2.78

Giải phương trình: $\dfrac{\sin 3x + \sin x}{\sqrt{2}|\cos x|} = \sin 2x + \cos 2x$.

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Phương trình được viết thành:

$$\sin 3x + \sin x = \sqrt{2}|\cos x|.\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin 2x\cos x = 2|\cos x|.\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- Xét $\cos x > 0$: Phương trình được viết thành:

$$\sin 2x.\cos x = \cos x.\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 2x + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow 4x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{3\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{2}$ (được biểu diễn bởi: $\dfrac{3\pi}{16}, \dfrac{11\pi}{16}, \dfrac{19\pi}{16}, \dfrac{27\pi}{16}$)

Vì $\cos x > 0$ nên chỉ nhận: $x = \dfrac{3\pi}{16} + k2\pi$, $\quad x = \dfrac{27\pi}{16} + k2\pi$.

- Xét $\cos x < 0$: Phương trình trở thành:

$$\sin 2x = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = -2x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{hay} \quad 2x = \pi + \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi$$

$\Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{2}$ (biểu diễn bởi 4 đầu cung: $-\dfrac{\pi}{16}, \dfrac{7\pi}{16}, \dfrac{15\pi}{16}, \dfrac{23\pi}{16}$)

Do $\cos x < 0$ nên chỉ nhận: $x = \dfrac{15\pi}{16} + k2\pi$, $\quad x = \dfrac{23\pi}{16} + k2\pi$.

Kết luận:

$$x = \frac{3\pi}{16} + k2\pi, \quad x = \frac{27\pi}{16} + k2\pi, \quad x = \frac{15\pi}{16} + k2\pi, \quad x = \frac{23\pi}{16} + k2\pi.$$

Đề 2.79

Giải phương trình: $\quad |\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1.$

Giải

Đặt: $\quad t = |\sin x - \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$ $\quad$ thì có: $0 \le t \le \sqrt{2}$

và: $\quad t^2 = 1 - 2\sin x \cos x = 1 - \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình trở thành:

$$t + 4(1 - t^2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4t^2 - t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \vee t = -\frac{3}{4} \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Với $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{hay} \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{hay} \quad x = \pi + k2\pi$$

- Với $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{hay} \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = k2\pi \quad \text{hay} \quad x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$$

Kết luận: $x = k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ là nghiệm.

Đề 2.80

Giải phương trình: $|\sin x + \cos x| + 2\sin 2x = 1$.

Giải

Đặt: $t = |\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$ thì có: $0 \le t \le \sqrt{2}$

và $t^2 = 1 + \sin 2x$

Phương trình trở thành:

$$t^2 + 2(t^2 - 1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 + t - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \vee t = -\frac{3}{2}$$

$0 \le t \le \sqrt{2}$ nên ta chỉ nhận: $t = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Với $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \quad x = k2\pi \quad \text{hay} \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

- Với $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pi + k2\pi \quad \text{hay} \quad x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Kết luận: $x = k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ là nghiệm.

Đề 2.81

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}=2\sin 2x$ với $0\le x\le 2\pi$

b) $\sqrt{2+\sqrt{6}-(6\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sin x}=2\sin x-\sqrt{2}$.

Giải

a) Ta có: $1\pm\cos x\ge 0,\ \forall x$

Phương trình được biến thành:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}\right)^2=4\sin^2 2x & (1)\\ \sin 2x\ge 0 & (2)\end{cases}$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow\quad 2+2\sqrt{1-\cos^2 x}=4\sin^2 2x\quad\Leftrightarrow\quad 1+|\sin x|=2\sin^2 2x$

$\Leftrightarrow\quad 1-2\sin^2 2x+|\sin x|=0$

$\Leftrightarrow\quad \cos 4x+|\sin x|=0\qquad (*)$

- Xét $0\le x\le\pi$: (thì $\sin x\ge 0$)

$(*)\Leftrightarrow\quad \cos 4x+\sin x=0\quad\Leftrightarrow\quad \cos 4x=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\quad 4x=\pm\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+k2\pi$

$\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}$ hay $x=-\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5}$

Vì $\sin x\ge 0$ và $\sin 2x\ge 0$ (do (2)) nên phải có $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ và ta chỉ nhận nghiệm gồm: $x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{3\pi}{10}$.

- Xét $\pi<x<2\pi$: (thì $\sin x<0$)

Ta có: $(*)\Leftrightarrow\quad \cos 4x-\sin x=0\quad\Leftrightarrow\quad \cos 4x=\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$\Leftrightarrow\quad 4x=\pm\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+k2\pi$

$\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5}$ hay $x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}$

Vì $\sin x<0$ và $\sin 2x\ge 0$ (do (2)) nên $\sin x<0,\ \cos x\le 0$

Và do đó phải có $\pi<x\le\frac{3\pi}{2}$; suy ra chỉ nhận nghiệm: $x=\frac{13\pi}{10},x=\frac{7\pi}{6}$

Kết luận: $x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{3\pi}{10},\ x=\frac{7\pi}{6},\ x=\frac{13\pi}{10}$.

b) Phương trình được biến đổi thành:

$$\begin{cases} 2+\sqrt{6}-(6\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sin x = (2\sin x-\sqrt{2})^2 & (1) \\ 2\sin x-\sqrt{2} \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Với: $(2) \Leftrightarrow \quad \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \quad 2+\sqrt{6}-(6\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sin x = 4\sin^2 x-4\sqrt{2}\sin x+2$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 x+2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sin x-\sqrt{6}=0$$

$$\Delta' = \left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{6}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$$

$$\sin x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên chỉ nhận: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$

Vậy: $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ hay $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Đề 2.82

Giải phương trình: $\sin 4x \sin x - \sin 3x \sin 2x = \frac{1}{2}\cos 3x + \sqrt{1+\cos x}$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$2\sin 4x \sin x - 2\sin 3x \sin 2x = \cos 3x + 2\sqrt{1+\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 3x - \cos 5x - (\cos x - \cos 5x) = \cos 3x + 2\sqrt{1+\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos x = 2\sqrt{1+\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos^2 x = 4(1+\cos x) \\ \cos x \leq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos^2 x - 4\cos x - 4 = 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = 2(1-\sqrt{2})$ (vì phải có $-1 \leq \cos x \leq 0$)

$\Leftrightarrow \quad x = \pm \arccos 2(1-\sqrt{2}) + k2\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

Đề 2.83

Giải phương trình: $\sqrt{\text{tg}x+\sin x}+\sqrt{\text{tg}x-\sin x}=2\sqrt{\text{tg}x}.\cos x$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \text{tg}x \pm \sin x \geq 0 \\ \text{tg}x \geq 0 \end{cases}$

Phương trình được biến đổi thành:

$$\left(\sqrt{\text{tg}x + \sin x} + \sqrt{\text{tg}x - \sin x}\right)^2 = 4\text{tg}x.\cos^2 x \quad (\text{với điều kiện } \cos x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x + \sin x + \text{tg}x - \sin x + 2\sqrt{\text{tg}^2 x - \sin^2 x} = 4\text{tg}x\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x + \sqrt{\text{tg}^2 x - \sin^2 x} = 2\text{tg}x\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\text{tg}^2 x - \sin^2 x} = \text{tg}x(2\cos^2 x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{tg}^2 x - \sin^2 x = \text{tg}^2 x(2\cos^2 x - 1)^2 \\ 2\cos^2 x - 1 \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \quad \text{tg}^2 x - \sin^2 x = \text{tg}^2 x(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1)$

$\Leftrightarrow \quad -\sin^2 x = 4\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x(3 - 4\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = 0, \ \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ (lúc đó: $\text{tg}x = 0$, $\cos^2 x = 1$ nên các điều kiện đều thỏa)

- Với $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ thì không thỏa $\cos x \geq 0$
- Với $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$

Do điều kiện: $\sin x \pm \text{tg}x \geq 0$, $\text{tg}x \geq 0$, $2\cos^2 x - 1 \geq 0$ nên không nhận.

(Với $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ thì $\sin x - \text{tg}x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} < 0$; $\quad x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ thì $\text{tg}x < 0$)

Kết luận: $x = k\pi$ là nghiệm của phương trình.

§8. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ CHỨA HÀM MŨ VÀ LÔGARIT

Để giải các phương trình có chứa hàm mũ và lôgarit cần nắm vững các tính chất sau:

- $y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y \quad (\text{với } x > 0, \ y \in \mathbb{R}, \ a > 0, \ a \neq 1)$
- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)$

Đề 2.84

Giải phương trình:

$$\cos(\pi.3^x) - 2\cos^2(\pi.3^x) + 2\cos(4\pi.3^x) - \cos(7\pi.3^x) =$$

$$= \sin(\pi.3^x) + 2\sin^2(\pi.3^x) - 2\sin(4\pi.3^x) + 2\sin(\pi.3^{x+1}) - \sin(7\pi.3^x)$$

Giải

Đặt $y = \pi.3^x$ $(y > 0)$ thì phương trình trở thành:

$$\cos y - 2\cos^2 y + 2\cos 4y - \cos 7y = \sin y + 2\sin^2 y - 2\sin 4y + 2\sin 3y - \sin 7y$$

$$\Leftrightarrow (\cos y - \cos 7y) + (\sin 7y - \sin y) + 2(\cos 4y + \sin 4y) -$$

$$- 2(\cos^2 y + \sin^2 y) - 2\sin 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4y\sin 3y + 2\cos 4y\sin 3y + 2(\cos 4y + \sin 4y) - 2 - 2\sin 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3y\,(\sin 4y + \cos 4y) + 2(\cos 4y + \sin 4y) - 2\,(1 + \sin 3y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin 4y + \cos 4y)(1 + \sin 3y) - 2(1 + \sin 3y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \sin 3y)(\sin 4y + \cos 4y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3y = -1 \quad \text{hay} \quad \cos\left(4y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3y = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{hay} \quad 4y - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \quad \text{hay} \quad y = k\frac{\pi}{2} \quad \text{hay} \quad y = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

- Với $y = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$: $\quad \pi.3^x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ (phải có $k \geq 1$ vì $3^x > 0$)

  $$\Leftrightarrow x = \log_3\left(-\frac{1}{6} + \frac{2k}{3}\right) \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z},\ k \geq 1)$$

- Với $y = k\frac{\pi}{2}$: $\quad \pi.3^x = k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3^x = \frac{k}{2}$ (với $k > 0$)

  $$\Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{k}{2}\right) \quad \text{với } k \in \mathbb{Z},\ k \geq 1$$

- Với $y = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$: $\quad \pi.3^x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{8} + \frac{k}{2}$ (phải có $k \geq 0$)

  $$\Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{1}{8} + \frac{k}{2}\right) \quad \text{với } k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0.$$

Vậy: $x = \log_3\left(-\frac{1}{6} + \frac{2k}{3}\right)$ $(k \geq 1)$,

$x = \log_3\left(\frac{k}{2}\right)$ $(k \geq 1)$, $\quad x = \log_3\left(\frac{1}{8} + \frac{k}{2}\right)$ $(k \geq 0)$.

Đề 2.85

Giải phương trình: $\log_{\frac{-x^2+6x}{10}}(\sin 3x + \sin x) = \log_{\frac{-x^2+6x}{10}}(\sin 2x)$.

Giải

Phương trình được biến đổi thành hệ sau:

$$\begin{cases} \sin 3x + \sin x = \sin 2x & (1) \\ -x^2 + 6x > 0 & (2) \\ -x^2 + 6x \neq 10 & (3) \\ \sin 2x > 0 & (4) \end{cases}$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow$ $0 < x < 6$

(3) $\Leftrightarrow$ $x^2 - 6x + 10 \neq 0$: đúng với mọi x vì $\Delta' < 0$

(1) $\Leftrightarrow$ $2\sin 2x \cos x = \sin 2x$ $\Leftrightarrow$ $\sin 2x(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin 2x = 0$ hay $\cos x = \frac{1}{2}$

Vì $\sin 2x > 0$ nên không nhận $\sin 2x = 0$

Với $\cos x = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

Do $\sin 2x > 0$ nên chỉ nhận $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

(vì $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ thì $\sin 2x = \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$)

Hơn nữa do $0 < x < 6$ nên $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ thỏa với $k = 0$ mà thôi.

Kết luận: $x = \frac{\pi}{3}$ là nghiệm.

Đề 2.86

Giải phương trình: $2^{\cos 2x} = 3.2^{\cos^2 x} - 4$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$2^{2\cos^2 x - 1} = 3.2^{\cos^2 x} - 4$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}.2^{2\cos^2 x} - 3.\ 2^{\cos^2 x} + 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ $t^2 - 6t + 8 = 0$ (với $t = 2^{\cos^2 x}$, $t \geq 2^0 = 1$)

$\Leftrightarrow$ $t = 2$, $t = 4$

- Với $t = 2$ thì $2^{\cos^2 x} = 2$ $\Leftrightarrow$ $\cos^2 x = 1$ $\Leftrightarrow$ $\sin x = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = k\pi$
- Với $t = 4$ thì $2^{\cos^2 x} = 2^2$ $\Leftrightarrow$ $\cos^2 x = 2$ (vô nghiệm)

Kết luận: $x = k\pi$ là nghiệm.

Đề 2.87

Tìm x, y thỏa phương trình: $\log_2\left(\cos^2 xy + \dfrac{1}{\cos^2 xy}\right) = \dfrac{1}{y^2 - 2y + 2}$.

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy} \geq 2\sqrt{\cos^2 xy.\frac{1}{\cos^2 xy}} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \log_a\left(\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy}\right) \geq \log_2 2 = 1$$

Mặt khác, ta lại có: $y^2 - 2y + 2 = (y - 1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{y^2 - 2y - 2} \leq 1$

Do đó phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \log_2\left(\cos^2 xy + \dfrac{1}{\cos^2 xy}\right) = 1 \\ \dfrac{1}{y^2 - 2y + 2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 xy + \dfrac{1}{\cos^2 xy} = 2 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 xy = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ y = 1 \end{cases}$$

Kết luận: $y = 1$, $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Đề 2.88

Giải phương trình: $\log_3|\pi x| + \log_{|\pi x|} 3 = \dfrac{2}{\sin^2(x + y) - 2\sin(x + y) - 2}$.

Giải

Ta có: $\sin^2(x + y) - 2\sin(x + y) + 2 = [\sin(x + y) - 1]^2 + 1 \geq 1$

- Trường hợp 1: xét $|\pi x| < 1$

Ta có: $\log_3|\pi x| < \log_3 1 = 0$, $\log_{|\pi x|}3 = \dfrac{1}{\log_3|\pi x|} < 0$

$$\Rightarrow \quad \log_3|\pi x| + \log_{|\pi x|} 3 < 0 < \frac{2}{\sin^2(x + y) - 2\sin(x + y) + 2}$$

Do đó phương trình không thỏa mãn.

- Trường hợp 2: Xét $|\pi x| > 1$ (lúc đó $\log_3|\pi x| > 0$)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\log_3|\pi x| + \log_{|\pi x|} 3 \geq 2\sqrt{\log_3|\pi x|.\log_{|\pi x|} 3} = 2$$

Ta lại có: $\sin^2(x+y) - 2\sin(x+y) + 2 \geq 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\sin^2(x+y) - 2\sin(x+y) + 2} \leq 2$$

Do đó phương trình trở thành: $\begin{cases} \log_3|\pi x| + \log_{\pi x} 3 = 2 & (1) \\ \dfrac{2}{\sin^2(x+y) - 2\sin(x+y) + 2} = 2 & (2) \end{cases}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \log_3|\pi x| = \log_{|\pi x|} 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\pi x| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\dfrac{3}{\pi}$

$(2) \Leftrightarrow \sin(x+y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{\pi}{2} \mp \dfrac{3}{\pi} + k2\pi$

Kết luận: $x = \pm\dfrac{3}{\pi}$, $y = \dfrac{\pi}{2} \mp \dfrac{3}{\pi} + k2\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

Đề 2.89

Tìm m để phương trình:

$\left(3+2\sqrt{2}\right)^{tgx} + \left(3-2\sqrt{2}\right)^{tgx} = m$ có đúng hai nghiệm $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Giải

Đặt $t = tgx$ (với $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì $-\infty < t < +\infty$)

Phương trình được viết thành: $\left(3+2\sqrt{2}\right)^t + \left(3-2\sqrt{2}\right)^t = m$

Đặt: $X = \left(3+2\sqrt{2}\right)^t$ thì: $\left(3-2\sqrt{2}\right)^t = \dfrac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^t} = \dfrac{1}{X}$

(vì $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$)

Phương trình biến thành:

$$X + \frac{1}{X} = m \quad \Leftrightarrow \quad X^2 - mX + 1 = 0 \text{ (với điều kiện } X > 0)$$

Phương trình ban đầu có đúng 2 nghiệm $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ khi phương trình $X^2 - mX + 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm thỏa $0 < X_1 < X_2$

Do đó phải có:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \vee m > 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m > 2$$

Kết luận: để phương trình có đúng 2 nghiệm $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $m > 2$.

Đề 2.90

Giải và biện luận phương trình:

$$4^{\sin x} + m.2^{\sin x} + m^2 - 1 = 0 \quad \textbf{với } -1 < m < 1.$$

Giải

Đặt $t = 2^{\sin x}$ thì phương trình được viết thành:

$$t^2 + mt + m^2 - 1 = 0 \qquad \left(\text{vì } -1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le t \le 2\right)$$

Ta có: $\Delta = m^2 - 4(m^2 - 1) = -3m^2 + 4 > 0$

$$(\text{vì } -1 < m < 1 \quad \Rightarrow \quad m^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad 4 - 3m^2 > 0)$$

$$f(2) = m^2 + 2m + 3 > 0 \text{ với } \forall m \in (-1, 1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = m^2 + \frac{1}{2}m - \frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4m^2 + 2m - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{13}\right)$$

m	-1		$\frac{1}{4}\left(\sqrt{13} - 1\right)$		1
$f\left(\frac{1}{2}\right)$		$-$	0	$+$	

$$\frac{S}{2} - 2 = -\frac{m}{2} - 2 = \frac{-m-4}{2} < 0 \qquad (\text{vì } -1 < m < 1)$$

$$\frac{S}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{m}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-m-1}{2} < 0 \qquad (\text{vì } -1 < m < 1)$$

Do đó ta có sự biện luận như sau:

- Nếu $-1 < m < \frac{1}{4}\left(\sqrt{13} - 1\right)$; thì: $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < f(2)$

  Nên có: $t_1 < \frac{1}{2} < t_2 < 2$ (chỉ nhận **nghiệm** t_2)

  và: $2^{\sin x} = \frac{1}{2}\left(-m + \sqrt{4 - 3m^2}\right) = t_2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \log_2 t_2 = \sin\alpha$

  $\Leftrightarrow \quad x = \alpha + k2\pi \vee x = \pi - \alpha + k2\pi$

- Nếu $\frac{1}{4}\left(\sqrt{13} - 1\right) < m < 1$; thì:

  $$\Delta > 0, \quad f(2) > 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \quad \frac{S}{2} - 2 < 0, \quad \frac{S}{2} - \frac{1}{2} < 0$$

  nên có: $t_1 < t_2 < \frac{1}{2}$ và do đó phương trình **vô nghiệm**.

- Nếu $m = \frac{1}{4}\left(\sqrt{13} - 1\right)$; thì: $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -m - \frac{1}{2} = \frac{-2-\sqrt{13}}{4} < 0$

Vì $\frac{1}{2} \le t \le 2$ nên chỉ nhận $t_1 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2^{\sin x} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Đề 2.91

Giải và biện luận theo tham số a phương trình:

$$(\lg\sin x)^2 - 2a\lg\sin x + 2 - a^2 = 0.$$

Giải

Điều kiện: $0 < \sin x \le 1$ (nên $\lg\sin x \le 0$)

Đặt $t = \lg\sin x$ thì phương trình trở thành: $t^2 - 2at + 2 - a^2 = 0$ (với $t \le 0$)

Ta có: $\Delta' = a^2 - (2 - a^2) = 2(a^2 - 1)$

$\Delta' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 1$

a	$-\infty$		-1		1		∞
Δ'		+	0	−	0	+	

$P = 2 - a^2$

$P = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{2}$

a	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		∞
P		−	0	+	0	−	

$S = 2a$, $S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$

a	$-\infty$		0		∞
S		−	0	+	

Ta có kết quả về sự biện luận như sau:

- Nếu $a < -\sqrt{2}$ hay $a > \sqrt{2}$; thì: $P < 0$ nên $t_1 < 0 < t_2$, do đó chỉ nhận $t = \lg\sin x = t_1 = a - \sqrt{2(a^2 - 1)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 10^{t_1} = \sin\alpha$

  $\Leftrightarrow \quad x = \alpha + k2\pi \ \vee \ x = \pi - \alpha + k2\pi$

- Nếu $-\sqrt{2} < a < -1$; thì: $\Delta' > 0$, $P > 0$, $S < 0$ nên có $t_1 < t_2 < 0$

  do đó nhận $\lg\sin x = a \pm \sqrt{2(a^2 - 1)}$

- Nếu $-1 < a < 1$; thì: $\Delta' < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

- Nếu $1 < a < \sqrt{2}$; thì: $\Delta' > 0$, $P > 0$, $S > 0$ nên $0 < t_1 < t_2$ và do đó phương trình vô nghiệm.

- Nếu $a = -\sqrt{2}$; thì: $t_1 = 0$, $t_2 = 2a = -2\sqrt{2}$

$t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lg \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$t = -2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lg \sin x = -2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 10^{-2\sqrt{2}} = \sin\beta$

$\Leftrightarrow \quad x = \beta + k2\pi \vee x = \pi - \beta + k2\pi$

- Nếu $a = -1$; thì: $t_1 = t_2 = a = -1$

$\Leftrightarrow \quad \lg \sin x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

- Nếu $a = 1$; thì: $t_1 = t_2 = a = 1$: phương trình vô nghiệm
- Nếu $a = \sqrt{2}$; thì: $t_1 = 0,\ t_2 = 2a = 2\sqrt{2}$

Chỉ nhận $\lg\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Đề 2.92

Giải phương trình: $2^{1+2\cos 5x} + 16^{\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)} = 9$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$2.4^{\cos 5x} + 4^{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2.4^{\cos 5x} + 4^{1-\cos 5x} = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad 2.4^{\cos 5x} + 4.4^{-\cos 5x} = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad 2.t + 4.\frac{1}{t} = 9 \quad (\text{với } t = 4^{\cos 5x},\ t > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2t^2 - 9t + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 4,\ t = \frac{1}{2}$$

- Với $t = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4^{\cos 5x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 5x = 1$

$\Leftrightarrow \quad 5x = k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{k2\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z})$

- Với $t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4^{\cos 5x} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2\cos 5x} = 2^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos 5x = -1$

$\Leftrightarrow \quad \cos 5x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 5x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{2\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5}$

Kết luận: $x = \frac{k2\pi}{5},\ x = \pm\frac{2\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5}$.

Đề 2.93

Giải phương trình: $3^{\sin 2x + 2\cos^2 x} + 3^{1 - \sin 2x + 2\sin^2 x} = 28$.

Giải

Ta có: $1 - \sin 2x + 2\sin^2 x = 1 - \sin 2x + 2(1 - \cos^2 x) = -\sin 2x - 2\cos^2 x + 3$

Phương trình được viết thành:

$$3^{\sin 2x + 2\cos^2 x} + 3^3.3^{-(\sin 2x + 2\cos^2 x)} = 28$$

$$\Leftrightarrow \quad t + 27.\frac{1}{t} = 28 \quad (\text{với } t = 3^{\sin 2x + 2\cos^2 x},\ t > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 28t + 27 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1,\ t = 27$$

- Với $t = 1 \Leftrightarrow \quad 3^{\sin 2x + 2\cos^2 x} = 1 = 3^0$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x + 2\cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x + 1 + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

- Với $t = 27 \Leftrightarrow \quad 3^{\sin 2x + 2\cos^2 x} = 3^3 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x + 2\cos^2 x = 3$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x + 1 + \cos 2x = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 3 : \text{ phương trình này vô nghiệm}$$

Kết luận: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Đề 2.94

Giải phương trình: $\frac{1}{2} + 16^{\sin x} = \frac{6}{16^{\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}$.

Giải

Ta có: $\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1 - \sin x)$

Phương trình được viết thành:

$$\frac{1}{2}.16^{\frac{1}{2}(1-\sin x)} + 16^{\sin x}.16^{\frac{1}{2}(1-\sin x)} = 6$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}.4.4^{-\sin x} + 4.16^{\frac{1}{2}\sin x} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 4^{-\sin x} + 2.4^{\sin x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{t} + 2t = 3 \quad (\text{với } t = 4^{\sin x},\ 0 < t \le 4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2t^2 - 3t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1,\ t = \frac{1}{2}$$

- Với $t = 1$: $\quad 4^{\sin x} = 1 = 4^0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi$
- Với $t = \frac{1}{2}$: $\quad 4^{\sin x} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2\sin x} = 2^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x = -1$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi\,,\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

Kết luận: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi\,,\ x = k\pi,\ \ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Đề 2.95

Giải phương trình: $\quad \mathbf{3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2}$.

Giải

Phương trình được viết thành:

$$3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(2\sin^2 x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(\log_2 \sin x)^2 + 1 + 2\log_2 \sin x = 2 \quad (\text{với điều kiện: } \sin x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3t^2 + 2t - 1 = 0 \quad (\text{với } t = \log_2 \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \quad t = -1,\ t = \frac{1}{3}$$

- Với $t = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 \sin x = -1 = \log_2 \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k2\pi\,,\quad x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

- Với $t = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 \sin x = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 2^{\frac{1}{3}}$

vì $2^{\frac{1}{3}} > 2^0 = 1$ nên $\sin x = 2^{\frac{1}{3}}$ là vô nghiệm.

Kết luận: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi\,,\quad x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Đề 2.96

Giải các phương trình sau:

a) $\mathbf{(\log_{\sin x} \cos x)^2 = 1}$ **b)** $\mathbf{\sqrt{\log_{\sin x} \cos x} = 1}$.

Giải

a) Điều kiện: $0 < \sin x < 1,\ \ 0 < \cos x \le 1$

Ta có: $(\log_{\sin x} \cos x)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{\sin x} \cos x = \pm 1$

- Với $\log_{\sin x} \cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Do điều kiện ta chỉ nhận: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

- Với $\log_{\sin x}\cos x = -1 = \log_{\sin x}\dfrac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{\sin x}$

  $\Leftrightarrow \sin 2x = 2$ (vô nghiệm)

Kết luận: $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện: $\log_{\sin x}\cos x \geq 0$

Ta có: $\sqrt{\log_{\sin x}\cos x} = 1 \Leftrightarrow \log_{\sin x}\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sin x = \cos x$ (phải có $\sin x > 0$, $\cos x > 0$)

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ (vì $\sin x > 0$, $\cos x > 0$)

Lúc đó $\sin x = \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $\log_{\sin x}\cos x = 1 > 0$

Vậy: $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ là nghiệm.

Đề 2.97

Giải phương trình: $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1 + \cos x) = 2$.

Giải

Ta có: $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1 + \cos x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 2\sin^2 x & (1) \\ \sqrt{2}\sin x > 0 & (2) \\ \sqrt{2}\sin x \neq 1 & (3) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow \sin x > 0$

(3) $\Leftrightarrow \sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(1) $\Leftrightarrow 1 + \cos x = 2(1 - \cos^2 x) \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$ hay $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ hay $x = \pi + k2\pi$

- Với $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$: $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (thỏa các điều kiện)
- Với $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$: $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (không thỏa điều kiện)
- Với $x = \pi + k2\pi$: $\sin x = 0$ (không thỏa điều kiện)

Kết luận: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Đề 2.98

Giải phương trình: $\lg\sin 2x - \lg\sin x = \lg\cos 2x - \lg\cos x + 2\lg 2$.

Giải

Điều kiện: $\sin 2x > 0$, $\sin x > 0$, $\cos 2x > 0$, $\cos x > 0$

Phương trình được viết thành:

$$\lg\sin 2x + \lg\cos x = \lg\cos 2x + \lg\sin x + \lg 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \lg(\sin 2x \cos x) = \lg(4\cos 2x.\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x \cos x = 4\cos 2x.\sin x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x\,(\cos^2 x - 2\cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \text{ hay } \cos^2 x - 2\cos 2x = 0$$

- Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ (không thỏa $\sin x > 0$)
- Với $\cos^2 x - 2\cos 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x - 2(2\cos^2 x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad -3\cos^2 x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Do $\cos x > 0$ nên không nhận $\cos x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Với $\cos x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ thì $\sin x = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ (do $\sin x > 0$)

Suy ra: $\sin 2x = 2\sin\cos x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} > 0$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} > 0$

Do đó nhận: $\cos x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ và $\sin x = \sqrt{\dfrac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}} + k2\pi$

Kết luận: $x = \arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}} + k2\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

Đề 2.99

Giải các phương trình sau:

a) $(\sin x)^{-\sin x} = 1 + \cot g^2 x$ **b)** $(\operatorname{tg}x)^{\cos^2 x} = (\cot g x)^{\sin x}$.

Giải

a) Điều kiện: $0 < \sin x \le 1$

- Nếu $\sin x = 1$ thì $\cot g x = 0$ nên phương trình thỏa; nhận nghiệm $\sin x = 1$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

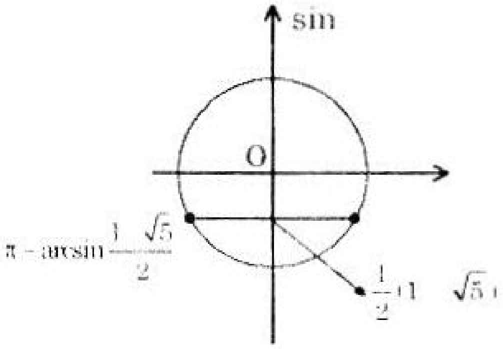
- Nếu $0 < \sin x < 1$

Ta có: $(\sin x)^{-\sin x} = 1 + \cot g^2 x \quad \Leftrightarrow \quad (\sin x)^{-\sin x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} = \sin^{-2} x$

$\Leftrightarrow \quad -\sin x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 2$ (vô nghiệm)

Kết luận: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

b) Điều kiện: $tgx > 0 \quad (tgx \neq 1)$


sin
O
$\pi - \arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$

Ta có: $(tgx)^{\cos^2 x} = (cotgx)^{\sin x}$

$\Leftrightarrow \quad (tgx)^{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{tgx}\right)^{\sin x}$

$\Leftrightarrow \quad (tgx)^{\cos^2 x} = (tgx)^{-\sin x}$

$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x = -\sin x \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \sin^2 x = -\sin x$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) \quad$ (vì $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) > 1$)

$\Leftrightarrow \quad x = \arcsin\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) + k2\pi$ hay $x = \pi - \arcsin\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) + k2\pi$

Vì $tgx > 0$ nên chỉ nhận $\quad x = \pi - \arcsin\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) + k2\pi$.

Đề 2.100

Giải phương trình: $\log_2\sin x - \log_2\cos x - \log_2(1 - tgx) - \log_2(1 + tgx) = 1$.

Giải

Điều kiện: $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $1 \pm tgx > 0$

Phương trình được viết thành:

$$\log_2\sin x - \log_2\cos x = \log_2(1 - tgx) + \log_2(1 + tgx) + \log_2 2$$

$\Leftrightarrow \quad \log_2 tgx = \log_2 2(1 - tg^2x) \quad \Leftrightarrow \quad tgx = 2(1 - tg^2x)$

$\Leftrightarrow \quad 2tg^2x + tgx - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tgx = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{17}\right)$

Vì $1 \pm tgx > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < tgx < 1$ nên phương trình vô nghiệm.

Đề 2.101

Giải phương trình: $\lg\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \lg(\cos x + \sin x) + \lg(\cos x - \sin x)$.

Giải

Điều kiện: $\sin\frac{x}{2} > 0$, $\cos x + \sin x > 0$, $\cos x - \sin x > 0$

Ta có: $\lg\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \lg(\cos x + \sin x) + \lg(\cos x - \sin x)$

$$\Leftrightarrow \quad \lg \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \lg(\cos^2x - \sin^2x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2} = \cos^2x - \sin^2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2} = \cos2x \quad \Leftrightarrow \quad \cos2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + k2\pi \ \text{ hay } \ 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{5} + k\frac{4\pi}{5} \quad \text{hay} \quad x = -\frac{\pi}{3} + k\frac{4\pi}{3}$$

Kiểm tra điều kiện chỉ nhận: $x = \frac{\pi}{5} + k\frac{4\pi}{5}$.

§9. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC TƯƠNG ĐƯƠNG

Đề 2.102

Cho các phương trình: $\sin3x = m\sin x + (4 - 2m)\sin^2x \quad (1)$

$\sin3x + \cos2x = 1 + 2\sin x\cos2x \quad (2)$

Tìm m để (1) và (2) là tương đương nhau.

Giải

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \ 3\sin x - 4\sin^3x + (1 - 2\sin^2x) = 1 + 2\sin x(1 - 2\sin^2x)$

$\Leftrightarrow \ 3\sin x - 4\sin^3x - 2\sin^2x = 2\sin x - 4\sin^3x$

$\Leftrightarrow \ \sin x - 2\sin^2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \text{ hay } \sin x = \frac{1}{2}$

Ta lại có:

(1) $\Leftrightarrow \ 3\sin x - 4\sin^3x = m\sin x + (4 - 2m)\sin^2x$

$\Leftrightarrow \ \sin x[4\sin^2x + (4 - 2m)\sin x + (m - 3)] = 0$

$\Leftrightarrow \ \sin x = 0 \quad \text{hay} \quad 4\sin^2x + (4 - 2m)\sin x + (m - 3) = 0 \ (*)$

$\Leftrightarrow \ \sin x = 0 \quad \text{hay} \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad \sin x = \frac{m-3}{2}$

Do đó (1) và (2) tương đương nhau khi:

$$\frac{m-3}{2} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{m-3}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad \left|\frac{m-3}{2}\right| > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 3 \quad \text{hay} \quad m = 4 \quad \text{hay} \quad |m - 3| > 2$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 3 \quad \text{hay} \quad m = 4 \quad \text{hay} \quad (m < 1 \vee m > 5)$$

Đề 2.103

Tìm a để hai phương trình sau là tương đương:

$2\sin^7x + (a - 1)\sin^3x - (2a + 1 - 2a^3)\sin x = 0 \quad (1)$

$2\sin^6x + \cos2x = a\cos^2x + 1 + a - 2a^3 \quad (2)$

Giải

Nhận xét rằng $\sin x = 0$ là nghiệm của (1), do đó nếu (1) và (2) là tương đương thì $\sin x = 0$ phải làm (2) thỏa mãn, suy ra:

$$0 + 1 = a + 1 + a - 2a^3 \quad (\text{vì } \sin x = 0 \text{ thì } \cos^2x = 1,\ \cos 2x = 1)$$

$$\Rightarrow \quad 2a - 2a^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a(1 - a^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0,\ a = \pm 1$$

- Với $a = 0$: (1) $\Leftrightarrow 2\sin^7x - \sin^3x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin^6x - \sin^2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin^2x - 1)(2\sin^4x + 2\sin^2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hay $\sin x = \pm 1$

Trong khi đó: (2) $\Leftrightarrow 2\sin^6x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2\sin^6x - 2\sin^2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2x(\sin^4x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hay $\sin x = \pm 1$

do đó (1) và (2) tương đương nhau.

- Với $a = 1$: thì (1) $\Leftrightarrow 2\sin^7x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin^6x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hay $\sin x = \pm\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$

Trong khi: (2) $\Leftrightarrow 2\sin^6x + \cos 2x = \cos^2x$

$\Leftrightarrow 2\sin^6x + 1 - 2\sin^2x = 1 - \sin^2x$

$\Leftrightarrow 2\sin^6x - \sin^2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hay $\sin x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

Điều này cho thấy (1) và (2) không tương đương.

- Với $a = -1$: thì (1) $\Leftrightarrow 2\sin^7x - 2\sin^3x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x[2\sin^6x - 2\sin^2x - 1] = 0$

$\Leftrightarrow \sin x[2\sin^2x(\sin^4x - 1) - 1] = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ (vì $2\sin^2x(\sin^4x - 1) \le 0$

$\Rightarrow 2\sin^2x(\sin^4 - 1) - 1 \ne 0$)

Trong khi: (2) $\Leftrightarrow 2\sin^6x + \cos 2x = -\cos^2x + 2$

$\Leftrightarrow 2\sin^6x + 1 - 2\sin^2x = (\sin^2x - 1) + 2$

$\Leftrightarrow 2\sin^6x - 3\sin^2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2x(2\sin^4x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ (vì $2\sin^4x \le 2 \Rightarrow 2\sin^4x - 3 \ne 0$)

Điều này chứng tỏ (1) và (2) tương đương.

Kết luận: (1) và (2) tương đương khi $a = 0$, $a = -1$.

Đề 2.104

Tìm m để mọi nghiệm của: $m\cos x - \sin x = 1$ (1)

đều là nghiệm của: $\cos x - m\sin x = m^2$ (2)

Giải

Nhận xét rằng (1) luôn có nghiệm (vì thỏa điều kiện: $a^2 + b^2 \geq c^2$).

Gọi x_0 là nghiệm của (1), đồng thời cũng là nghiệm của (2), ta có:

$$\begin{cases} m\cos x_0 - \sin x_0 = 1 \\ \cos x_0 - m\sin x_0 = m^2 \end{cases}$$

Xem hệ trên như hệ bậc nhất theo $\cos x_0$, $\sin x_0$ thì ta có:

$$\cos x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m^2 & -m \end{vmatrix}}{1 - m^2} = \frac{m^2 - m}{1 - m^2} = \frac{m(m-1)}{(1-m)(1+m)} = -\frac{m}{1+m} \quad (\text{với } m \neq \pm 1)$$

$$\sin x_0 = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m^2 \end{vmatrix}}{1 - m^2} = \frac{m^3 - 1}{1 - m^2} = \frac{(m-1)(m^2+m+1)}{(1-m)(1+m)} = -\frac{m^2+m+1}{1+m}$$

Mà $\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0 = 1$ nên: $\dfrac{m^2}{(1+m)^2} + \dfrac{(m^2+m+1)^2}{(1+m)^2} = 1$

$\Leftrightarrow \quad m^2 + m^4 + 2m^2(m+1) + (m+1)^2 = (1+m)^2$

$\Leftrightarrow \quad m^2[1 + m^2 + 2(m+1)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2(m^2 + 2m + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad m = 0$

- Với $m = 0$: thì (1) $\Leftrightarrow$ $\sin x = -1$

  (2) $\Leftrightarrow$ $\cos x = 0$

  Do đó mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2)

- Với $m = 1$: thì (1) $\Leftrightarrow$ $\cos x - \sin x = 1$

  (2) $\Leftrightarrow$ $\cos x - \sin x = 1$

  Do đó mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2)

- Với $m = -1$: thì (1) $\Leftrightarrow$ $-\cos x - \sin x = 1$

  (2) $\Leftrightarrow$ $\cos x + \sin x = 1$

  Do đó mọi nghiệm của (1) không là nghiệm của (2)

Kết luận: $m = 0$, $m = 1$ là giá trị của m cần tìm.

Đề 2.105

Tìm m để 2 phương trình sau là tương đương:

$3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \sin 2x$ (1)

$m\cos 3x + (4 - 8m)\sin^2 x + (7m - 4)\cos x + 8m - 4 = 0$ (2)

Giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \quad 3\cos x + 2\cos^2 x - 1 - \cos 3x + 1 = \cos x - \cos 3x$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos x + 2\cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0$ hay $\cos x = -1$

Ta lại có: $(2) \Leftrightarrow \quad m(4\cos^3 x - 3\cos x) + (4 - 8m)(1 - \cos^2 x) +$

$+ (7m - 4)\cos x + 8m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4m\cos^3 x + (8m - 4)\cos^2 x + (4m - 4)\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x[4m\cos^2 x + (8m - 4)\cos x + 4m - 4] = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = 0$ hay $\cos x = -1$ hay $\cos x = \dfrac{4 - 4m}{4m}$ (với $m \neq 0$)

- Nếu $m = 0$: thì $(2) \Leftrightarrow \quad \cos x(-4\cos x - 4) = 0$

  $\Leftrightarrow \quad \cos x = 0$ hay $\cos x = -1$

do đó (2) tương đương với (1)

- Nếu $m \neq 0$: để (2) tương đương với (1) thì phải có:

i) $\dfrac{4 - 4m}{4m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1$

ii) $\dfrac{4 - 4m}{4m} = 1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 4m = -4m$ (vô nghiệm)

iii) $\left|\dfrac{4 - 4m}{4m}\right| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad |1 - m| > |m|$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 2m + m^2 > m^2 \quad \Leftrightarrow \quad m < \dfrac{1}{2} \quad (m \neq 0)$

Kết luận: $m < \dfrac{1}{2}$ $(m \neq 0)$ hay $m = 1$.

Đề 2.106

Tìm a, b sao cho hai phương trình sau là tương đương:

$$2\cos x + \sqrt{2}a\sin x = \sqrt{2} + a\sin 2x \qquad (1)$$

$$1 + \cos x + 2b\sin x = \cos 2x + \sin 2x + 2\sin^2 x + b \qquad (2)$$

Giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \quad 2\cos x - \sqrt{2} + \sqrt{2}a\sin x - 2a\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}(\sqrt{2}\cos x - 1) + \sqrt{2}a\sin x(1 - \sqrt{2}\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{2}\cos x - 1)(1 - a\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hay $\sin x = \dfrac{1}{a}$ (với $a \neq 0$)

Ta lại có:

$(2) \Leftrightarrow \quad 1 + \cos x + 2b\sin x = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x + b$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x - 2\sin x\cos x + 2b\sin x - b = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x(1 - 2\sin x) + b(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 2\sin x)(\cos x - b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \text{ hay } \cos x = b$$

Do đó để (1) và (2) tương đương thì phải có: $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$

Vậy: $a = 2$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Đề 2.107

Tìm a để hai phương trình sau là tương đương:

$$1 + \cos 2x + \cos 3x = 2\cos 2x\cos x \qquad (1)$$

$$a\cos x + (4 - a)(1 + \cos 2x) = 4\cos^2 x - \cos 3x \qquad (2)$$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \quad 1 + \cos 2x + \cos 3x = \cos 3x + \cos x$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x - \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \text{ hay } \cos x = \frac{1}{2}$$

Ta lại có:

$$(2) \Leftrightarrow \quad a\cos x + 2(4 - a)\cos^2 x = 4\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x + 2(2 - a)\cos^2 x + (a - 3)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x[4\cos^2 x + 2(2 - a)\cos x + a - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad \text{hay} \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad \cos x = \frac{a - 3}{2}$$

Do đó để (1) và (2) tương đương thì:

i) $\frac{a - 3}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$

ii) $\frac{a - 3}{2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = 4$

iii) $\left|\frac{a - 3}{2}\right| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad |a - 3| > 4 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 6a + 5 > 0$

$$\Leftrightarrow \quad a < 1 \text{ hay } a > 5$$

Kết luận: $a < 1$ hay $a = 3$ hay $a = 4$ hay $a > 5$.

Chương III

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

- Để giải một hệ phương trình lượng giác ta thường sử dụng các phép biến đổi để đưa về hệ phương trình đại số.
- Khi biến đổi hệ phương trình ta cần nắm vững các kiến thức cơ bản sau:

$$\begin{cases} f(x) = u(x) \\ g(x) = v(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = u(x) + v(x) \\ f(x) - g(x) = u(x) - v(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} af(x) + bg(x) = 0 \\ a'f(x) + b'g(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \text{(với điều kiện: } ab' - a'b \neq 0\text{).}$$

$$\begin{cases} f(x) = u(x) \\ g(x) = v(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^2(x) = u^2(x) \\ g^2(x) = v^2(x) \end{cases}$$

(phép biến đổi này không tương đương).

- Khi dùng phép bình phương 2 vế để biến đổi thì hệ thu được không tương đương với hệ ban đầu nên khi giải xong cần phải thử lại để chọn lời giải thích hợp.

Đề 3.1

Giải hệ:
$$\begin{cases} \mathbf{x + y = \dfrac{\pi}{3}} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{\sin x + \sin y = -1} & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow 2.\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = -1 \text{ (do (1))}$$

$$\Leftrightarrow 2.\frac{1}{2}.\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = \pi + k\pi \Leftrightarrow x - y = 2\pi + k4\pi \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta được: $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$, $y = -\dfrac{5\pi}{6} - k2\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

Đề 3.2

Giải hệ:
$$\begin{cases} \mathbf{x + y = \dfrac{\pi}{2}} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{tgx + tgy = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}} & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

Giải

Từ (1) ta có: tgx.tgy = 1 (vì tgx = cotgy).

Hệ trở thành: $\begin{cases} \text{tgx.tgy} = 1 \\ \text{tgx} + \text{tgy} = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Do đó tgx, tgy là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)X + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_1 = \sqrt{3}\ ,\ X_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Từ đó ta được: $\begin{cases} \text{tgx} = \sqrt{3} \\ \text{tgy} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ hay $\begin{cases} \text{tgx} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{tgy} = \sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} - k\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{3} - k\pi \end{cases} \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z}).$$

Lưu ý: vì $x + y = \dfrac{\pi}{2}$ nên phải dùng cùng giá trị k cho cả x và y.

Đề 3.3

Giải hệ: $\begin{cases} \cos x + \cos y = \dfrac{1}{2} & (1) \\ \sin x + \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

(2) $\Leftrightarrow 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Chia vế, ta có: $\text{tg}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x + y = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \qquad (3)$

Với (3), thì: $\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + k\pi\right) = (-1)^k \cos\dfrac{\pi}{3} = (-1)^k.\dfrac{1}{2}$

nên (1) được biến thành: $(-1)^k.\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \qquad (*)$

- *Trường hợp k chẵn:* (*) $\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + m2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x - y = \pm\frac{2\pi}{3} + m4\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Hệ phương trình cho ta:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x - y = \dfrac{2\pi}{3} + m4\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x - y = -\dfrac{2\pi}{3} + m4\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + (k+2m)\pi \\ y = (k-2m)\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = (k+2m)\pi \\ y = \dfrac{2\pi}{3} + (k-2m)\pi \end{cases} \quad (\text{với } m, k \in \mathbb{Z}).$$

- *Trường hợp k lẻ:*

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} + n2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x - y = \pm\frac{4\pi}{3} + n4\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Hệ phương trình cho ta:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x - y = \dfrac{4\pi}{3} + n4\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x - y = -\dfrac{4\pi}{3} + n4\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + (k+2n)\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + (k-2n)\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + (k+2n)\pi \\ y = \pi + (k-2n)\pi \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

Đề 3.4

Giải hệ: $\begin{cases} \mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y + \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y + 1 = 0 & (1) \\ \sqrt{3}\cos 2x + \cos 2y = -1 & (2) \end{cases}$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y = -(1 + \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}(x-y) = -1$

$$\Leftrightarrow \quad x - y = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = y - \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Thế x vào (2), ta được: $\sqrt{3}\cos\left(2y - \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos 2y = -1$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}.\sin 2y + \cos 2y = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2y + \frac{1}{2}\cos 2y = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2y - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2y - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + m2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \text{hay} \quad y = -\frac{\pi}{6} + m\pi$$

Với $y = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$ thì tgy không xác định.

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = -\dfrac{5\pi}{12} + (m+k)\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + m\pi \end{cases}$ $(m, k \in \mathbb{Z})$.

Đề 3.5

Giải hệ: $\begin{cases} \mathbf{4\sin x\cos y = 1} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{tgy = 3tgx} & \mathbf{(2)} \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \dfrac{\sin y}{\cos y} = \dfrac{3\sin x}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \sin y\cos x = 3\sin x\cos y.$

$$\Leftrightarrow \quad \sin y\cos x = \frac{3}{4} \quad (\text{do } (1))$$

Hệ cho ta: $\begin{cases} \sin x\cos y = \dfrac{1}{4} \\ \sin y\cos x = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\cos y + \sin y\cos x = 1 \\ \sin x\cos y - \sin y\cos x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + m2\pi \\ x - y = -\dfrac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + m2\pi \\ x - y = \dfrac{7\pi}{6} + n2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + (m+n)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{3} + (m-n)\pi \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + (m+n)\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + (m-n)\pi \end{cases}$$

Đề 3.6

Giải hệ: $\begin{cases} \mathbf{\cos x + \cos y = 1} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{\cos\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1} & \mathbf{(2)} \end{cases}$

Giải

Đặt: $u = \cos\dfrac{x}{2}$, $v = \cos\dfrac{y}{2}$ thì: $\cos x = 2u^2 - 1$, $\quad \cos y = 2v^2 - 1$

Hệ trở thành: $\begin{cases} 2u^2 - 1 + 2v^2 - 1 = 1 \\ u + v = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = \dfrac{3}{2} & (3) \\ u + v = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 & (4) \end{cases}$

Ta có: (3) $\Leftrightarrow \quad (u + v)^2 - 2uv = \dfrac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 - 2uv = \dfrac{3}{2}$ (do (4))

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} - 2uv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad uv = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Do đó hệ cho ta: $\begin{cases} u + v = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ u.v = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v = -1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} v = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ u = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\dfrac{y}{2} = -1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \cos\dfrac{y}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\dfrac{x}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{2} + k4\pi \\ y = 2\pi + n4\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 2\pi + n4\pi \\ y = \pm\dfrac{\pi}{2} + k4\pi \end{cases} \text{ (với } k, n \in \mathbb{Z}\text{).}$$

Đề 3.7

Giải hệ: $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x\cos y & (1) \\ \cos^2 x = \sin x\sin y & (2) \end{cases}$

Giải

Hệ được biến đổi thành:

$$\begin{cases} \cos x\cos y + \sin x\sin y = \cos^2 x + \sin^2 x \\ \cos x\cos y - \sin x\sin y = \sin^2 x - \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = 1 \\ \cos(x + y) = -\cos 2x = \cos(2x + \pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = k2\pi \\ x + y = \pm(2x + \pi) + m2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = k2\pi \\ -x + y = \pi + m2\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x - y = k2\pi \\ 3x + y = -\pi + m2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + (k + m)\dfrac{\pi}{2} \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + (m - 3k)\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \text{ (với } m, k \in \mathbb{Z}\text{).}$$

Đề 3.8

Giải hệ: $\begin{cases} \sin x + \cos x = \dfrac{1}{2} + \sin y - \cos y \\ 4\sin 2x = 3 + 2\sin 2y \end{cases}$

Giải

Đặt $u = \sin x + \cos x$ thì $u^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = u^2 - 1$

$v = \sin y - \cos y$ thì $v^2 = 1 - \sin 2y \Rightarrow \sin 2y = 1 - v^2$

Hệ được viết thành:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2} + v \\ 4(u^2 - 1) = 3 + 2(1 - v^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{2} + v & (1) \\ 2u^2 + v^2 - \dfrac{9}{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vô (2) ta có:

$$2\left(\frac{1}{2} + v\right)^2 + v^2 - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 3v^2 + 2v - 4 = 0 \Leftrightarrow v = \frac{1}{3}\left(-1 \pm \sqrt{13}\right)$$

Vì $v = \sin y - \cos y = \sqrt{2}\sin\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \le v \le \sqrt{2}$

do đó ta chỉ nhận: $v = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{13} - 1\right)$ và suy ra: $u = \dfrac{1 + 2\sqrt{13}}{6}$

(u thỏa điều kiện: $-\sqrt{2} \le u \le \sqrt{2}$)

Hệ trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2\sqrt{13} + 1}{6} \\ \sqrt{2}\sin\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{13} - 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2\sqrt{13} + 1}{6\sqrt{2}} = \cos\alpha \\ \sin\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{13} - 1\right) = \sin\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\alpha + k2\pi \\ y - \dfrac{\pi}{4} = \beta + m2\pi \end{cases} \text{ hay } y - \frac{\pi}{4} = \pi - \beta + m2\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \beta + m2\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{4} - \beta + m2\pi \end{cases}$$

Đề 3.9

Giải hệ: $\begin{cases} \sin x - 7\cos y = 0 \\ 5\sin y - \cos x + 6 = 0 \end{cases}$

Giải

Hệ được biến thành: $\begin{cases} \sin x = 7\cos y \\ \cos x = 5\sin y + 6 \end{cases}$

Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (7\cos y)^2 + (5\sin y + 6)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \quad 49\cos^2 y + 25\sin^2 y + 60\sin y + 35 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 49(1 - \sin^2 y) + 25\sin^2 y + 60\sin y + 35 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 24\sin^2 y - 60\sin y - 84 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\sin^2 y - 15\sin y - 21 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin y = -1 \ \vee \ \sin y = \dfrac{21}{6}$ (loại)

Với $\sin y = -1$ thì $\cos y = 0$ nên hệ trên cho ta:

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + m2\pi \end{cases} (k, m \in \mathbb{Z}).$$

Đề 3.10

Giải hệ: $\begin{cases} \mathbf{\sin x + \sin y = \sqrt{2}} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{\cos x + \cos y = \sqrt{2}} & \mathbf{(2)} \end{cases}$

Giải

Ta có: (1) $\quad \Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \sqrt{2}$

(2) $\quad \Leftrightarrow \quad 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \sqrt{2}$

Chia vế, ta được: $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = 1 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$$\Leftrightarrow \quad x + y = \frac{\pi}{2} + k2\pi \qquad (3)$$

- *Xét k là số nguyên chẵn:* $\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Thế vào (2), ta có: $2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{2} = m2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x - y = m4\pi \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x - y = m4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + (k + 2m)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + (k - 2m)\pi \end{cases} (m, k \in \mathbb{Z}, \text{ k chẵn}).$$

- *Xét k là số nguyên lẻ:* $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Thế vào (2) ta có: $2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = \pi + n2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 2\pi + n4\pi \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta có:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x - y = 2\pi + n4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + (k + 2n)\pi \\ y = -\frac{3\pi}{4} + (k - 2n)\pi \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{Z}).$$

Đề 3.11

Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \\ \text{tgx.tgy} = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \text{tgx} = 2\text{tgy} \\ \sin x = 2\sin y \end{cases} \quad (0 < x, y < \frac{\pi}{2})$

Giải

a) Với $x + y = \frac{\pi}{6}$ thì ta có: $\text{tg}(x + y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \frac{\text{tgx} + \text{tgy}}{1 - \text{tgxtgy}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tgx} + \text{tgy} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ (do tgxtgy} = 3)$$

Ta có: $\begin{cases} \text{tgx} + \text{tgy} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \text{tgxtgy} = 3 \end{cases}$

nên tgx, tgy là nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}X + 3 = 0$

$\Delta' = \frac{1}{3} - 3 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

b) Hệ cho: $\begin{cases} \text{tgx} = 2\text{tgy} \\ \sin x = 2\sin y \end{cases}$

Chia vế hai phương trình trên, ta có: cosx = cosy

Suy ra: $\sin^2 x = \sin^2 y \Rightarrow (2\sin y)^2 = \sin^2 y$ (vì sin x = 2siny)

$\Rightarrow 3\sin^2 y = 0$. Điều này không đúng vì $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Đề 3.12

Giải hệ: $\begin{cases} 9\sin^2 x - 5\sin x\sin 2x + 17\cos x - 11 = 0 & (1) \\ 5\cos^3 x - 3\sin^2 x + 8\cos x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow\quad 9\sin^2 x - 10\sin^2 x.\cos x + 17\cos x - 11 = 0$

$\Leftrightarrow\quad 9\sin^2 x - 10(1 - \cos^2 x)\cos x + 17\cos x - 11 = 0$

$\Leftrightarrow\quad 9(1 - t^2) - 10(1 - t^2)t + 17t - 11 = 0$ (với $t = \cos x$)

$\Leftrightarrow\quad 10t^3 - 9t^2 + 7t - 2 = 0 \qquad (1')$

(2) $\Leftrightarrow\quad 5\cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) + 8\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow\quad 5t^3 - 3(1 - t^2) + 8t - 1 = 0$ (với $t = \cos x$)

$\Leftrightarrow\quad 5t^3 + 3t^2 + 8t - 4 = 0 \qquad (2')$

Nhân (2') cho 2 rồi trừ vế cho (1'), ta được:

$$15t^2 + 9t - 6 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t = -1 \vee t = \frac{6}{15}$$

Với $t = -1$: Thế vào (1') không thỏa.

Với $t = \dfrac{6}{15}$: Thế vào (1') không thỏa.

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Đề 3.13

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z = \pi & (1) \\ \cos x + \cos y + \cos z = 1 & (2) \\ \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 & (3) \end{cases}$

Giải

Ta có: (2) $\Leftrightarrow\quad 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) - (1 - \cos z) = 0$

$\Leftrightarrow\quad 2\sin\dfrac{z}{2}\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) - 2\sin^2\dfrac{z}{2} = 0 \qquad \left(\text{vì } \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\quad 2\sin\dfrac{z}{2}\left[\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) - \sin\dfrac{z}{2}\right] = 0$

$\Leftrightarrow\quad \sin\dfrac{z}{2}\left[\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right] = 0 \qquad \left(\text{vì } \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\quad \sin\dfrac{z}{2}(-2)\sin\dfrac{x}{2}.\sin\left(-\dfrac{y}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{2} = 0 \quad \text{hay} \quad \sin\frac{y}{2} = 0 \quad \text{hay} \quad \sin\frac{z}{2} = 0$$

- Với $\sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Lúc đó: $\cos x = \cos k2\pi = 1$

Thế vào (3) thì: $1 + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \\ \cos z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ z = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

Để thỏa (1) thì: $x = k2\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (với $2k + m + n = 0$)

- Với $\sin\frac{y}{2} = 0 \Leftrightarrow y = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và ta có $\cos y = 1$

nên (3) trở thành: $\cos^2 x + \cos^2 z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ z = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}$

Để (1) thỏa thì: $x = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $y = k2\pi$, $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (với $m + n + 2k = 0$)

- Với $\sin\frac{z}{2} = 0 \Leftrightarrow z = k2\pi$ nên $\cos z = 1$

Lúc đó: (3) $\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos^2 y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}$

Để (1) thỏa thì: $x = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $z = k2\pi$ (với $m + n + 2k = 0$).

Đề 3.14

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \text{tg}x\text{tg}z = 3 & (1) \\ \text{tg}y\text{tg}z = 6 & (2) \\ x + y + z = \pi & (3) \end{cases}$

Giải

Ta có: (3) $\Leftrightarrow (x + y) + z = \pi$ nên: $\text{tg}(x + y) = -\text{tg}z \Leftrightarrow \dfrac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x\text{tg}y} = -\text{tg}z$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x + \text{tg}y + \text{tg}z = \text{tg}x\text{tg}y\text{tg}z$$

Nhân 2 vế cho tgz ta có:

$$\text{tgxtgz} + \text{tgytgz} + \text{tg}^2z = (\text{tgxtgz})(\text{tgytgz})$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 + 6 + \text{tg}^2z = 3.6 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}^2z = 9 \quad \Rightarrow \quad \text{tgz} = \pm 3$$

- Với tgz = 3: Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} \text{tgx} = 1 \\ \text{tgy} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y = \text{arctg}2 + m\pi \end{cases}$

còn z = arctg3 + nπ nên nghiệm là: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y = \text{arctg}2 + m\pi \quad (\text{với } k + m + n = 0) \\ z = \text{arctg}3 + n\pi \end{cases}$

Nhận xét: $\text{arctg}2 + \text{arctg}3 + \dfrac{\pi}{4} = \pi$

- Với tgz = −3: Từ (1) và (2) ta lại có: $\begin{cases} \text{tgx} = -1 \\ \text{tgy} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y = -\text{arctg}2 + m\pi \end{cases}$

còn tgz = −3 $\Leftrightarrow$ $z = -\text{arctg}3 + n\pi$

Vậy nghiệm là: $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y = -\text{arctg}2 + m\pi \quad (\text{với } k + m + n = 2). \\ z = -\text{arctg}3 + n\pi \end{cases}$

Đề 3.15

Giải hệ: $\begin{cases} \cot gx - \cot gy = x - y & (1) \\ 5x + 8y = 2\pi & (2) \\ 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi & (3) \end{cases}$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow$ $y - \text{cotgy} = x - \text{cotgx}$ $\Leftrightarrow$ $f(y) = f(x)$

Với $f(t) = t - \text{cotgt}$, $0 < t < \pi$

Ta có: $f'(t) = 1 + (1 + \text{cotg}^2t) > 0$

Do đó f (t) là hàm số tăng trên (0, π)

Suy ra: $f(y) = f(x) \Leftrightarrow y = x$

Lúc đó (2) cho ta: $y = x = \dfrac{2\pi}{13}$

Kết luận: $x = y = \dfrac{2\pi}{13}$ là nghiệm của hệ.

Đề 3.16

Giải hệ: $$\begin{cases} \text{tg}x + \text{cotg}x = 2\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) & (1) \\ \text{tg}y + \text{cotg}y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $y \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Ta có (1) cho ta: $|\text{tg}x + \text{cotg}x| = 2\left|\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$ (1')

$$\begin{aligned} \text{Mà } (\text{tg}x + \text{cotg}x)^2 &= \text{tg}^2x + \text{cotg}^2x + 2 \\ &\geq 2\sqrt{\text{tg}^2x.\text{cotg}^2x} + 2 \text{ (theo bất đẳng thức Côsi)} \\ &\geq 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

Nên $|\text{tg}x + \text{cotg}x| \geq 2$

Trong khi $2\left|\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| \leq 2$ nên ta có:

$$(1') \Leftrightarrow \begin{cases} |\text{tg}x + \text{cotg}x| = 2 \\ 2\left|\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg}^2x = \text{cotg}^2x \\ \left|\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = 1 \end{cases}$$

(BĐT Côsi thành đẳng thức)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg}x = \pm 1 \\ \cos\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + m\pi \end{cases}$$

Với: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ và $y = \dfrac{\pi}{4} + m\pi$,

thì có: $\text{tg}y = \text{cotg}y = 1$. $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ nên (2) không thỏa.

Với: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ và $y = \dfrac{\pi}{4} + m\pi$,

thì có: $\text{tg}x = \text{cotg}x = -1$, $\text{tg}y = \text{cotg}y = 1$

$$\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) = (-1)^m$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$$

Do đó: (1) thỏa khi m là số nguyên lẻ

(2) thỏa khi **k** là số nguyên lẻ

Kết luận: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (với m, k là các số nguyên lẻ)

Đề 3.17

Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x - \sin y = y - \sin x \\ x + 2y = \pi \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \arcsin y = y + \arcsin x \\ 2x + 3y = \pi \end{cases}$

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} x - \sin y = y - \sin x \\ x + 2y = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sin x = y + \sin y & (1) \\ x + 2y = \pi & (2) \end{cases}$

Xét hàm số $f(t) = t + \sin t$

Ta có: $f'(t) = 1 + \cos t \geq 0$ (vì $\cos t \geq -1, \forall t$)

nên **f (t)** là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$

Suy ra: (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Với **x = y thì** (2) cho ta: $x = y = \frac{\pi}{3}$

Kết luận: $x = y = \frac{\pi}{3}$ **là nghiệm** của hệ.

b) Hệ được viết thành: $\begin{cases} x - \arcsin x = y - \arcsin y & (1) \\ 2x + 3y = \pi & (2) \end{cases}$

Xét hàm số: $f(t) = t - \arcsin t$ với: $-1 \leq t \leq 1$

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2} - 1}{\sqrt{1-t^2}} < 0, \quad t \in (-1, 1)$$

Suy ra **f (t)** là hàm số **giảm** trên $(-1; 1)$

mà (1) $\Leftrightarrow$ **f (x)** = f (y) **nên phải** có $x = y$

Với x = **y thì** (2) cho ta: $x = y = \frac{\pi}{5}$

Kết luận: $x = y = \frac{\pi}{5}$ là **nghiệm** của hệ.

Đề 3.18

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin \pi(x + y) + \cos \pi(x + y) = -\sqrt{2} & (1) \\ x^2 + y^2 = \frac{9}{16} & (2) \end{cases}$

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left[\pi(x+y)-\frac{\pi}{4}\right] = -\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left[\pi(x+y)-\frac{\pi}{4}\right] = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \pi(x+y)-\frac{\pi}{4} = \pi + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi(x+y) = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x+y = \frac{5}{4} + 2k \qquad (1')$$

Ta lại có: (2) $\Leftrightarrow \quad (x+y)^2 - 2xy = \frac{9}{16}$

$$\Leftrightarrow \quad 2xy = (x+y)^2 - \frac{9}{16} = \left(\frac{5}{4}+2k\right)^2 - \frac{9}{16} \quad (\text{do } (1'))$$

$$\Leftrightarrow \quad xy = \frac{1}{2}(4k^2+5k+1) \qquad (2')$$

Từ (1') và (2') ta có x, y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - \left(\frac{5}{4}+2k\right)X + \frac{1}{2}(4k^2+5k+1) = 0 \qquad (*)$$

Điều kiện có nghiệm là: $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{5}{4}+2k\right)^2 - 2(4k^2+5k+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -4k^2 - 5k - \frac{7}{16} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 64k^2 + 80k + 7 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-40-\sqrt{952}}{64} \leq k \leq \frac{-40+\sqrt{952}}{64} \quad \Leftrightarrow \quad k = -1 \ (\text{vì } k \in \mathbb{Z})$$

Lúc đó (*) trở thành: $X^2 + \frac{3}{4}X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 0, X = -\frac{3}{4}$

Vậy: $\left(x = 0,\ y = -\frac{3}{4}\right)$ hay $\left(x = -\frac{3}{4},\ y = 0\right)$.

Đề 3.19

Cho hệ: $\begin{cases} \cos x\cos y = m & (1) \\ x + y = \frac{\pi}{3} & (2) \end{cases}$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Giải

Ta có: (2) cho ta: $\cos(x+y) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x\cos y - \sin x\sin y = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad m - \sin x\sin y = \frac{1}{2} \text{ (do (1))}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\sin y = m - \frac{1}{2}$$

Do đó hệ cho ta: $\begin{cases} \cos x\cos y = m \\ \sin x\sin y = m - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \cos(x - y) = 2m - \dfrac{1}{2}$ (3)

Ta có: hệ có nghiệm khi (3) có nghiệm, nên ta phải có:

$$-1 \le 2m - \frac{1}{2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \le 2m \le \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$$

Vậy: $-\dfrac{1}{4} \le m \le \dfrac{3}{4}$ thì hệ có nghiệm.

Đề 3.20

Cho hệ: $\begin{cases} \sin x\cos y = m & (1) \\ \sin y\cos x = m^2 & (2) \end{cases}$

Tìm m để cho hệ phương trình có nghiệm.

Giải

Cộng vế (1) với (2), ta có: $\sin(x + y) = m + m^2$ (3)

Trừ vế (1) cho (2), ta có: $\sin(x - y) = m - m^2$ (4)

Do đó hệ có nghiệm khi (3) có nghiệm và (4) có nghiệm.

tức là phải có: $\begin{cases} -1 \le m + m^2 \le 1 \\ -1 \le m - m^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m + 1 \ge 0 \\ m^2 + m - 1 \le 0 \\ m^2 - m + 1 \ge 0 \\ m^2 - m - 1 \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \le 0 \\ m^2 - m - 1 \le 0 \end{cases} \text{(vì } m^2 + m + 1 > 0\text{ , } m^2 - m + 1 > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}) \le m \le \dfrac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) \le m \le \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) \le m \le \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)$$

Vậy để hệ có nghiệm thì: $\dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) \le m \le \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

Đề 3.21

Giải hệ: $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin a \\ \cos x + \cos y = 1 + \cos a \end{cases}$ **(với $0 < a < 2\pi$).**

Giải

Hệ cho ta: $\begin{cases} 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 2\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2} \\ 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 2\cos^2\dfrac{a}{2} \end{cases}$

Chia vế 2 phương trình, ta có:

$$\text{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \text{tg}\,\frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2} + k\pi \Leftrightarrow x - y = a + k2\pi \quad (4)$$

Thế (4) vào phương trình thứ hai của hệ thì:

$$2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right).(-1)^k\cos\frac{a}{2} = 2\cos^2\frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = (-1)^k\cos\frac{a}{2} = \cos\left(\frac{a}{2} + k\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = \pm\left(\frac{a}{2} + k\pi\right) + m2\pi$$

$$\Leftrightarrow x + y = a + (2k + 4m)\pi \quad \text{hay} \quad x + y = -a + (4m - 2k)\pi$$

Với: $\begin{cases} x - y = a + k2\pi \\ x + y = a + (2k + 4m)\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2(k + m)\pi \\ y = 2m\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$

Với: $\begin{cases} x - y = a + k2\pi \\ x + y = -a + (4m - 2k)\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m\pi \\ y = -a + 2(k + m)\pi \end{cases}$

Đề 3.22

Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \mathbf{x - y = m} & (1) \\ \mathbf{2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4\cos^2(x - y)} & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 4\cos(x + y)\cos(x - y) = 1 + 4\cos^2 m$ (do (1))

$\Leftrightarrow 4\cos^2 m - 4\cos(x + y)\cos m + 1 = 0$ (vì $x - y = m$)

$\Leftrightarrow \left[4\cos^2 m - 4\cos(x + y)\cos m + \cos^2(x + y)\right] + 1 - \cos^2(x + y) = 0$

$\Leftrightarrow [2\cos m - \cos(x + y)]^2 + \sin^2(x + y) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos m - \cos(x + y) = 0 & (3) \\ \sin(x + y) = 0 & (4) \end{cases}$

Với (4) $\Leftrightarrow \cos(x + y) = \pm 1$

Khi $\cos(x + y) = 1$ thì (3) cho ta $\cos m = \dfrac{1}{2}$

Khi $\cos(x+y) = -1$ thì (3) cho ta $\cos m = -\frac{1}{2}$

Do đó ta có kết quả biện luận như sau:

khi $\cos m = \frac{1}{2}$: Hệ trở thành: $\begin{cases} x - y = m \\ \cos(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = m \\ x + y = k2\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{m}{2} + k\pi, \quad y = -\frac{m}{2} + k\pi \ (\text{với } k \in \mathbb{Z})$$

Khi $\cos m = -\frac{1}{2}$: Hệ trở thành: $\begin{cases} x - y = m \\ \cos(x+y) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = m \\ x + y = \pi + k2\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{m}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ y = -\frac{m}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Khi $\cos m \neq \pm\frac{1}{2}$: hệ phương trình vô nghiệm.

Đề 3.23

Giải và biện luận hệ: $\begin{cases} \cos x = \cos^2 y & (1) \\ \sin x = m\sin y & (2) \end{cases}$

Giải

Bình phương 2 vế của (1) ta có: $\cos^2 x = \cos^4 y$

Bình phương 2 vế của (2) ta có: $\sin^2 x = m^2\sin^2 y$

Cộng vế 2 phương trình trên, ta được: $1 = \cos^4 y + m^2\sin^2 y$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^4 y + m^2(1 - \cos^2 y) - 1 = 0 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - m^2 t + (m^2 - 1) = 0 \quad (\text{với } t = \cos^2 y,\ 0 \le t \le 1)$$

Nếu hệ thống có nghiệm thì (3) phải có nghiệm, do đó:

$t^2 - m^2 t + m^2 - 1 = 0$ phải có nghiệm thỏa: $0 \le t \le 1$

Điều này đúng với mọi m vì có $t_1 = 1$, $t_2 = m^2 - 1$

Với $t = 1$ thì $\cos^2 y = 1 \Rightarrow \sin y = 0$, lúc đó $\cos x = 1$ ($\sin x = 0$) sẽ thỏa hệ.

Vậy hệ luận có nghiệm với mọi m.

Đề 3.24

Cho hệ: $\begin{cases} \sin^2 x + m\,\mathrm{tg}\,y = m \\ \mathrm{tg}^2 y + m\sin x = m \end{cases}$

1. Giải hệ với m = 1.

2. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Giải

1. Với m = 1 thì có hệ: $\begin{cases} \sin^2 x + \mathrm{tg}\,y = 1 & (1) \\ \mathrm{tg}^2 y + \sin x = 1 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Đặt $u = \sin x$, $v = \text{tg}y$ $(-1 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R})$

Hệ được viết thành: $\begin{cases} u^2 + v = 1 & (3) \\ v^2 + u = 1 & (4) \end{cases}$

Trừ vế (3) cho (4), ta có: $u^2 - v^2 + v - u = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (u - v)(u + v - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v \text{ hay } u + v = 1.$$

- *Với $u = v$:* Thế vào (4) thì: $u^2 + u - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$

Vì: $-1 \leq u \leq 1$ nên chỉ nhận: $u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$

Và ta có: $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \\ \text{tg}y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \text{ hay } x = \pi - \alpha + k2\pi \\ y = \beta + m\pi \end{cases}$

$$\left(\text{Với } \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{5} - 1}{2},\ \beta = \text{arctg}\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$$

- *Với $u + v = 1$:* Thì $v = 1 - u$. Thế vào (4) ta có:

$$(1 - u)^2 + u = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0 \vee u = 1$$

Do đó hệ cho ta:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \text{tg}y = 1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \text{tg}y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + m\pi \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ y = m\pi \end{cases}$$

Kết luận:

$$\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ y = \beta + m\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pi - \alpha + k2\pi \\ y = \beta + m\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = k\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + m\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ y = m\pi \end{cases}$$

2. Với $u = \sin x$, $v = \text{tg}y$ thì hệ được biến thành: $\begin{cases} u^2 + mv = m & (1) \\ v^2 + mu = m & (2) \end{cases}$

Trừ vế (1) cho (2), ta có: $u^2 - v^2 + m(v - u) = 0 \Leftrightarrow (u - v)(u + v - m) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad u = v \ \text{ hay } \ u + v = m$$

i) Xét $u = v$: Thế vào (1) thì có: $u^2 + mu - m = 0$ (điều kiện: $-1 \leq u \leq 1$)

Phương trình trên có nghiệm khi:

- *Trường hợp 1:* $-1 < u_1 \le u_2 < 1$

Do đó: $\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ f(1) > 0 \\ f(-1) > 0 \\ -1 < \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases}$ $(f(u) = u^2 + mu - m)$

$$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m \ge 0 \Leftrightarrow m \le -4 \vee m \ge 0$$

$$f(1) > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$$

$$f(-1) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

$$-1 < \frac{S}{2} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\frac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Do đó hệ trên cho: $0 \le m < \dfrac{1}{2}$

- *Trường hợp 2:* $u_1 < -1 < u_2 < 1$ hay $-1 < u_1 < 1 < u_2$

Lúc đó cần có: $f(1).f(-1) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$

- *Trường hợp 3:* $u = 1$ là nghiệm hay $u = -1$ là nghiệm

$$\Leftrightarrow f(1) = 0 \vee f(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Vậy: $0 \le m < \dfrac{1}{2} \vee m > \dfrac{1}{2} \vee m = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m \ge 0$

Xét $u + v = m$: thì $v = m - u$. Thế vào (1), ta có:

$$u^2 + m(m - u) = m \Leftrightarrow u^2 - mu + m^2 - m = 0 \quad (-1 \le u \le 1)$$

Ta có: $\Delta = m^2 - 4(m^2 - m) = -3m^2 + 4m$

$$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{4}{3}$$

Mà trong trường hợp $u = v$ ta đã tìm thấy điều kiện $m \ge 0$ rồi, nên không cần xét phần ii) này.

Kết luận: hệ có nghiệm khi $m \ge 0$.

- *Nhận xét:*

1) Trong lời giải trên ta lý luận hệ có nghiệm khi phương trình tìm $u = \sin x$ có nghiệm; nếu lý luận phương trình tìm v có nghiệm là không bảo đảm để hệ có nghiệm.

2) Ta có thể dùng phương pháp đồ thị để giải bài toán trên.

Đề 3.25

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} & (1) \\ \cos 2x + \cos 2y = m & (2) \end{cases}$

Giải

Đặt: u = sinx, v = siny thì: $-1 \le u \le 1$, $-1 \le v \le 1$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \quad u + v = \dfrac{1}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow \quad 1 - 2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 y = m$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - 2(u^2 + v^2) = m \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + v^2 = 1 - \frac{m}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (u + v)^2 - 2uv = 1 - \frac{m}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} - 2uv = 1 - \frac{m}{2} \text{ (do (1))} \quad \Leftrightarrow \quad uv = \frac{m}{4} - \frac{3}{8}$$

Do đó u, v là nghiệm của phương trình: $X^2 - \dfrac{1}{2}X + \left(\dfrac{m}{4} - \dfrac{3}{8}\right) = 0 \qquad (*)$

Ta có: Hệ có nghiệm khi phương trình (*) có 2 nghiệm thỏa:

$$-1 \le X_1 \le X_2 \le 1$$

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \\ f(-1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 \le 0 \\ \dfrac{S}{2} + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4} - m + \dfrac{3}{2} \ge 0 \\ \dfrac{m}{4} + \dfrac{1}{8} \ge 0 \\ \dfrac{m}{4} + \dfrac{9}{8} \ge 0 \\ \dfrac{1}{4} - 1 \le 0 \\ \dfrac{1}{4} + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{7}{4} \\ m \ge -\dfrac{1}{2} \\ m \ge -\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{7}{4}.$$

Kết luận: Hệ có nghiệm khi: $-\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{7}{4}$.

Đề 3.26

Cho hệ: $\begin{cases} \sin x + m\sin y = 1 \\ \cos x + m\cos y = 1 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với m = 1.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Giải

a) Với m = 1, hệ trở thành: $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 & (1) \\ \cos x + \cos y = 1 & (2) \end{cases}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 1$

(2) $\Leftrightarrow \quad 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 1$

Chia vế 2 phương trình trên, ta có:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x + y = \frac{\pi}{2} + k2\pi \qquad (3)$$

Lúc đó: $\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) = (-1)^k \sin\dfrac{\pi}{4} = (-1)^k.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- *Với k là số nguyên chẵn:* thì $\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Thế vào (1), ta có: $\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x-y}{2} = \pm\dfrac{\pi}{4} + m2\pi$

$$\Leftrightarrow \quad x - y = \pm\frac{\pi}{2} + m4\pi$$

Do đó hệ cho ta: $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x - y = \dfrac{\pi}{2} + m4\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x - y = -\dfrac{\pi}{2} + m4\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + (k + 2m)\pi \\ y = (k - 2m)\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = (k + 2m)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + (k - 2m)\pi \end{cases}$

- *Với k là số nguyên lẻ:* thì $\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Thế vào (1) ta có: $\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{2} = \pm\frac{3\pi}{4} + n2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x - y = \pm\frac{3\pi}{2} + n4\pi$$

Do đó hệ cho ta: $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x - y = \dfrac{3\pi}{2} + n4\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x - y = -\dfrac{3\pi}{2} + n4\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + (k + 2n)\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + (k - 2n)\pi \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + (k + 2n)\pi \\ y = \pi + (k - 2n)\pi \end{cases}$$

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} \sin x + m\sin y = 1 & (1) \\ \cos x + m\cos y = 1 & (2) \end{cases}$

(1) cho ta: $\sin^2 x + 2m\sin x\sin y + m^2\sin^2 y = 1$

(2) cho ta: $\cos^2 x + 2m\cos x\cos y + m^2\cos^2 y = 1$

Cộng vế 2 phương trình, ta được: $1 + 2m\cos(x - y) + m^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(x - y) = \frac{1 - m^2}{2m} \text{ (với } m \neq 0) \qquad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm khi: $-1 \leq \dfrac{1 - m^2}{2m} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 - m^2}{2m} - 1 \leq 0 \\ \dfrac{1 - m^2}{2m} + 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(-m^2 - 2m + 1) \leq 0 \\ m(-m^2 + 2m + 1) \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{2} \leq m < 0 \vee m \geq \sqrt{2} - 1 \\ m \leq 1 - \sqrt{2} \vee 0 < m \leq \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 - \sqrt{2} \vee \sqrt{2} - 1 \leq \sqrt{2} + 1 \qquad (**)$$

Với m thỏa điều kiện (**) thì phương trình (*) có nghiệm $t = x - y$ thỏa:

$$2m\cos(x - y) = 1 - m^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2m\cos t = 1 - m^2$$

Với $t = x - y$ thì $x = t + y$. Thế x vào hệ, thì có

$$\begin{cases} \sin(t + y) + m\sin y = 1 \\ \cos(t + y) + m\cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t\cos y + \sin y\cos t + m\sin y = 1 \\ \cos t\cos y - \sin y\sin t + m\cos y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m + \cos t)\sin y + \sin t\cos y = 1 \\ -\sin t\sin y + (m + \cos t)\cos y = 1 \end{cases}$$

Với $D = \begin{vmatrix} m + \cos t & \sin t \\ -\sin t & m + \cos t \end{vmatrix} = (m + \cos t)^2 + \sin^2 t$

$$= m^2 + 2m\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = m^2 + (1 - m^2) + 1 = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \sin t \\ 1 & m + \cos t \end{vmatrix} = m + \cos t - \sin t$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} m + \cos t & 1 \\ -\sin t & 1 \end{vmatrix} = m + \cos t + \sin t$$

Ta có: $\sin y = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{1}{2}(m + \cos t - \sin t)$

$$\cos y = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{2}(m + \cos t + \sin t)$$

Để tồn tại nghiệm y thì ta phải có: $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(m + \cos t - \sin t)^2 + \frac{1}{4}(m + \cos t + \sin t)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (m + \cos t)^2 - 2(m + \cos t)\sin t + \sin^2 t + (m + \cos t)^2 + 2(m + \cos t)\sin t + \sin^2 t = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(m + \cos t)^2 + 2\sin^2 t = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 + 2m\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 + (1 - m^2) + 1 = 2 \quad (\text{vì } 2m\cos t = 1 - m^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = 2 \text{ (điều này luôn đúng)}$$

Vậy điều kiện để hệ có nghiệm là:

$$-1 - \sqrt{2} \le m \le 1 - \sqrt{2} \quad \text{hay} \quad \sqrt{2} - 1 \le m \le \sqrt{2} + 1.$$

Đề 3.27

Cho hệ: $\begin{cases} \mathrm{tg}^2 x + y^2 = 1 \\ ax^2 + a - 1 = y - |\sin x| \end{cases}$. **Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất.**

Giải

Gọi (x_0, y_0) là nghiệm của hệ, ta có:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}^2 x_0 + y_0^2 = 1 \\ ax_0^2 + a - 1 = y_0 - |\sin x_0| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}^2(-x_0) + y_0^2 = 1 \\ a(-x_0)^2 + a - 1 = y_0 - |\sin(-x_0)| \end{cases}$$

Do đó $(-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm của hệ, suy ra nếu hệ có nghiệm duy nhất thì phải có: $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

Thế $x_0 = 0$ vào hệ, ta được: $\begin{cases} y_0^2 = 1 \\ a - 1 = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \pm 1 \\ a = 1 + y_0 \end{cases}$ suy ra: $a = 2$, $a = 0$

- *Với $a = 0$:* Hệ trở thành: $\begin{cases} \mathrm{tg}^2 x + y^2 = 1 \\ -1 = y - |\sin x| \end{cases}$

Hệ có nghiệm $(x = 0, y = -1)$, $(x = \pi, y = -1)$ nên không thỏa điều kiện có nghiệm duy nhất.

- *Với $a = 2$:* Hệ trở thành: $\begin{cases} \mathrm{tg}^2 x + y^2 = 1 & (1) \\ 2x^2 + 1 = y - |\sin x| & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra: $y^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le y \le 1$

Từ (2) suy ra: $y = 2x^2 + 1 + |\sin x|$ nên $y \ge 1$.

Do đó phải có: $y = 1$

Thế $y = 1$ vào hệ thì có: $\begin{cases} \mathrm{tg}^2 x = 0 \\ 2x^2 + |\sin x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Như vậy hệ có duy nhất nghiệm là $(x = 0,\ y = 1)$

Kết luận: hệ có nghiệm duy nhất khi $a = 2$.

Đề 3.28

Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \mathbf{3\sin x + \sin(3a - 3y) = 0} & (1) \\ \mathbf{2\log_4(a - y) + 2\log_4(2\sqrt{y}) = \log_2\sqrt{y} + \log_2(2x)} & (2) \end{cases}$$

Tìm a để hệ có nghiệm là số chẵn.

Giải

Điều kiện : $x > 0,\ y > 0,\ a > y$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \quad \log_2(a - y) + \log_2(2\sqrt{y}) = \log_2\sqrt{y} + 1 + \log_2 x$

$\Leftrightarrow \quad \log_2(a - y) + 1 + \log_2\sqrt{y} = \log_2\sqrt{y} + 1 + \log_2 x$

$\Leftrightarrow \quad \log_2(a - y) = \log_2 x \quad \Leftrightarrow \quad a - y = x$

Thế $x = a - y$ vào phương trình (1), ta được:

$\sin3(a - y) + 3\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin3x + 3\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin x - 4\sin^3 x + 3\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x(3 - 2\sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \vee \sin^2 x = \dfrac{3}{2}$ (loại) $\quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi$ (với $k \in \mathbb{Z},\ k > 0$ vì $x > 0$)

Với $x = k\pi$ thì $y = a - x = a - k\pi$

Vì $y > 0 \Leftrightarrow a - k\pi > 0 \Leftrightarrow 0 < k\pi < a$ (vì đã có $k > 0$)

Do đó số nghiệm của hệ phương trình là số các số nguyên k thỏa điều kiện $0 < k\pi < a$; vì thế để số nghiệm của hệ số là số chẵn thì phải có:

$2m\pi < a \le (2m + 1)\pi$ (với m là nguyên dương).

Đề 3.29

Tìm a, b để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} \mathbf{tgx = acotgx} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{tg2x = bcosy} & \mathbf{(2)} \end{cases}$

Giải

Phương trình (1) cho ta: $\text{tg}x = a.\dfrac{1}{\text{tg}x} \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}^2x = a$ (với $\text{tg}x \ne 0$)

Để giải được x thì phải có $a > 0$, lúc đó: $\quad \text{tg}x = \pm\sqrt{a}$

Suy ra: $\quad \text{tg}2x = \dfrac{2\text{tg}x}{1 - \text{tg}^2x} = \dfrac{\pm 2\sqrt{a}}{1 - a}$ (với $a \ne 1$)

Thế vào (2), ta được: $\quad b\cos y = \pm\dfrac{2\sqrt{a}}{1 - a} \quad \Rightarrow \quad \cos y = \pm\dfrac{2\sqrt{a}}{b(1 - a)}$ (với $b \ne 0$)

Để giải được y thì phải có: $\left|\dfrac{2\sqrt{a}}{b(1-a)}\right| \le 1 \iff 2\sqrt{a} \le |b(1-a)|$

Vậy hệ có nghiệm khi: $a > 0$, $a \ne 1$, $2\sqrt{a} \le |b(1-a)|$.

Đề 3.30

Giải và biện luận theo tham số a hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sin 3x\cos 2y + \cos 3x \sin 2y = 2^a & (1) \\ \cos(x-y) = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có: $(2) \iff x - y = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

$(1) \iff \sin(3x + 2y) = 2^a$

Phải có điều kiện: $-1 \le 2^a \le 1 \iff a \le 0$ (vì $2^a > 0$, $\forall a$)

Lúc đó: $a \le 0$ thì: $(1) \iff 3x + 2y = \sin\alpha$ (với $\sin\alpha = 2^a$)

$$\iff \left[\begin{array}{l} 3x + 2y = \alpha + m2\pi \\ 3x + 2y = \pi - \alpha + m2\pi \end{array}\right.$$

Ta có các hệ sau đây:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + 2y = \alpha + m2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \dfrac{1}{5}(4k + 2m)\pi \\ y = \dfrac{\alpha - \pi}{5} + \dfrac{1}{5}(2m - 6k)\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + 2y = \pi - \alpha + m2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}\left(5\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) + \dfrac{1}{5}(4k + 2m)\pi \\ y = -\dfrac{\alpha}{5} + \dfrac{1}{5}(2m - 6k)\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + 2y = \alpha + m2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}\left(\alpha - \dfrac{2\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{5}(4k + 2m)\pi \\ y = \dfrac{1}{5}(\alpha + \pi) + \dfrac{1}{5}(2m - 6k)\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + 2y = \pi - \alpha + m2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) + \dfrac{1}{5}(4k + 2m)\pi \\ y = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{6\pi}{3} - \alpha\right) + \dfrac{1}{5}(2m - 6k)\pi \end{cases}$$

Khi $a > 0$: hệ vô nghiệm.

Đề 3.31

Giải hệ: $\begin{cases} \log_2 x.\log_y 2 + 1 = 0 & (1) \\ \sin x\cos y + \sin y\cos x = 1 & (2) \end{cases}$ **với điều kiện x + y < 8.**

Giải

Điều kiện: $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \quad \log_y x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad xy = 1$

$(2) \Leftrightarrow \quad \sin(x + y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

Vì $0 < x + y < 8$ nên phải chọn: $k = 0$, $k = 1$

- *Với k = 0:* Ta có: $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ xy = 1 \end{cases}$

nên x, y là nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - \dfrac{\pi}{2}X + 1 = 0$

$$\Delta = \frac{\pi^2}{4} - 4 = \frac{1}{4}(\pi^2 - 16) < 0\text{: vô nghiệm.}$$

- *Với k = 1:* Ta có: $\begin{cases} x + y = \dfrac{5\pi}{2} \\ xy = 1 \end{cases}$

nên x, y là nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - \dfrac{5\pi}{2}X + 1 = 0$

$$\Delta = \frac{25\pi^2}{4} - 4 = \frac{1}{4}(25\pi^2 - 16) > 0$$

Vậy nghiệm của hệ là :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{25\pi^2 - 16}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{25\pi^2 - 16}\right) \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{25\pi^2 - 16}\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{25\pi^2 - 16}\right) \end{cases}$$

Đề 3.32

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin(1 - y + x^2).\cos 2x - \cos(y - 1 - x^2).\sin 2x = 0 & (1) \\ y - 1 - x^2 + 2x \geq 0 & (2) \\ \log_{2^x}\left(\dfrac{2^{y+2x}}{2^{1+x^2}}\right) = 2 - x & (3) \end{cases}$$

Giải

Ta có: (3) ⇔ $\dfrac{2^{y+2x}}{2^{1+x^2}} = (2^x)^{2-x}$ ⇔ $2^{y+2x} = 2^{1+x^2}.2^{2x-x^2}$

⇔ $2^{y+2x} = 2^{1+2x}$ ⇔ $y + 2x = 1 + 2x$ ⇔ $y = 1$

Thế $y = 1$ vào (2), ta có : $-x^2 + 2x \geq 0$ ⇔ $0 \leq x \leq 2$

Thế $y = 1$ vào (1) thì: $\sin x^2.\cos 2x - \cos x^2.\sin 2x = 0$

⇔ $\sin(x^2 - 2x) = 0$ ⇔ $x^2 - 2x = k\pi$

Vì $0 \leq x \leq 2$ ⇔ $2x - x^2 \geq 0$ ⇔ $x^2 - 2x \leq 0$ nên phải có $k \leq 0$

Với $k = 0$: $x^2 - 2x = 0$ ⇔ $x = 0 \vee x = 2$

Với $k \leq -1$: $x^2 - 2x - k\pi = 0$ thì $\Delta' = 1 + k\pi < 0$ (vì $k \leq -1 \Rightarrow k\pi \leq -\pi$): vô nghiệm.

Kết luận: Hệ có nghiệm là ($x = 0$, $y = 1$) hay ($x = 2$, $y = 1$).

Đề 3.33

Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin a & (1) \\ \cos x + \cos y = \cos a & (2) \end{cases} \quad \textbf{(a là tham số)}$$

Giải

Ta có: (1) ⇔ $2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \sin a$

(2) ⇔ $2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \cos a$

- *Với $\cos a \neq 0$:* chia vế (1) cho (2) thì:

$$\text{tg}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \text{tg}a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{2} = a + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 2a + k2\pi$$

Lúc đó: $\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \cos(a + k\pi) = (-1)^k\cos a$

Nên (2) cho ta: $2(-1)^k\cos a.\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \cos a$ ⇔ $\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{(-1)^k}{2}$

- *Xét k là số nguyên chẵn:* thì $\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ ⇔ $\dfrac{x-y}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3} + m2\pi$

⇔ $x - y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + m4\pi$

Hệ cho ta: $\begin{cases} x + y = 2a + k2\pi \\ x - y = \dfrac{2\pi}{3} + m4\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} x + y = 2a + k2\pi \\ x - y = -\dfrac{2\pi}{3} + m4\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \dfrac{\pi}{3} + (k + 2m)\pi \\ y = a - \dfrac{\pi}{3} + (k - 2m)\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = a - \dfrac{\pi}{3} + (k + 2m)\pi \\ y = a + \dfrac{\pi}{3} + (k - 2m)\pi \end{cases}$$

- *Xét k là nguyên số lẻ :* thì

$$\cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x - y}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} + n2\pi$$

$$\Leftrightarrow x - y = \pm\frac{4\pi}{3} + n4\pi$$

$$\text{Hệ cho ta: } \begin{cases} x + y = 2a + k2\pi \\ x - y = \dfrac{4\pi}{3} + n4\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x + y = 2a + k2\pi \\ x - y = -\dfrac{4\pi}{3} + n4\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \dfrac{2\pi}{3} + (k + 2n)\pi \\ y = a - \dfrac{2\pi}{3} + (k - 2n)\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = a - \dfrac{2\pi}{3} + (k + 2n)\pi \\ y = a + \dfrac{2\pi}{3} + (k - 2n)\pi \end{cases}$$

- *Với cos a = 0:* Hệ cho ta: $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x + \cos y = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} \sin x + \sin y = -1 \\ \cos x + \cos y = 0 \end{cases}$

Xét: $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 & \text{(i)} \\ \cos x + \cos y = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$

(ii) $\Leftrightarrow \cos x = -\cos y = \cos(\pi - y)$

$\Leftrightarrow x = \pi - y + k2\pi$ hay $x = y - \pi + k2\pi$

– Với $x = \pi - y + k2\pi$ thì $\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$ nên:

(i) $\Leftrightarrow \sin y = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{\pi}{6} + m2\pi \vee y = \dfrac{5\pi}{6} + m2\pi$

$$\text{Hệ nhận nghiệm: } \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + (k - m)2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + m2\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + (k - m)2\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + m2\pi \end{cases}$$

– Với $x = y - \pi + k2\pi$ thì $\sin x = \sin(y - \pi) = -\sin y$

nên (i) trở thành: $-\sin y + \sin y = 1$ vô nghiệm.

Xét: $\begin{cases} \sin x + \sin y = -1 & \text{(iii)} \\ \cos x + \cos y = 0 & \text{(iv)} \end{cases}$

(iv) $\Leftrightarrow \cos x = -\cos y = \cos(\pi - y)$

$\Leftrightarrow x = \pi - y + k2\pi$ hay $x = y - \pi + k2\pi$

– Với $x = \pi - y + k2\pi$ thì $\sin x = \sin y$ nên:

(iii) $\Leftrightarrow \quad \sin y = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad y = -\dfrac{\pi}{6} + m2\pi$ hay $y = \dfrac{7\pi}{6} + m2\pi$

Hệ nhận nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{6} + (k - m)2\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + m2\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + (k - m)2\pi \\ y = \dfrac{7\pi}{6} + m2\pi \end{cases}$

– Với $x = y - \pi + k2\pi$ thì $\sin x = -\sin y$ nên thế vào (iii) vô nghiệm.

Kết luận:

– Nếu $\cos a = 0$: $\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + (k - m)2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + m2\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + (k - m)2\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + m2\pi \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{6} + (k - m)2\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + m2\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + (k - m)2\pi \\ y = \dfrac{7\pi}{6} + m2\pi \end{cases}$

– Nếu $\cos a \neq 0$: $\begin{cases} x = a + \dfrac{\pi}{3} + (k + 2m)\pi \\ y = a - \dfrac{\pi}{3} + (k - 2m)\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = a - \dfrac{\pi}{3} + (k + 2m)\pi \\ y = a + \dfrac{\pi}{3} + (k - 2m)\pi \end{cases}$

(k là số nguyên chẵn)

$\begin{cases} x = a + \dfrac{2\pi}{3} + (k + 2n)\pi \\ y = a - \dfrac{2\pi}{3} + (k - 2n)\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = a - \dfrac{2\pi}{3} + (k + 2n)\pi \\ y = a + \dfrac{2\pi}{3} + (k - 2n)\pi \end{cases}$

(k là số nguyên lẻ).

Chương IV

BẤT PHƯƠNG TRÌNH & HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Để giải bất phương trình lượng giác ta dùng các biến đổi thích hợp để dẫn bài toán về:

i) Giải các bất phương trình lượng giác cơ bản.

ii) Giải các bất phương trình đại số (với cách đặt ẩn số phụ).

iii) Xét dấu các hàm số lượng giác

- *Về cách xét dấu hàm số lượng giác:*
  - + Xác định chu kỳ của hàm số.
  - + Giải phương trình tương ứng.
  - + Trong mỗi khoảng nghiệm hàm số liên tục không đổi dấu.
  - + Khi đi qua nghiệm đơn hàm số liên tục đổi dấu.

Đề 4.1

Giải bất phương trình: $\cos x - \sqrt{3}\sin x < 1$.

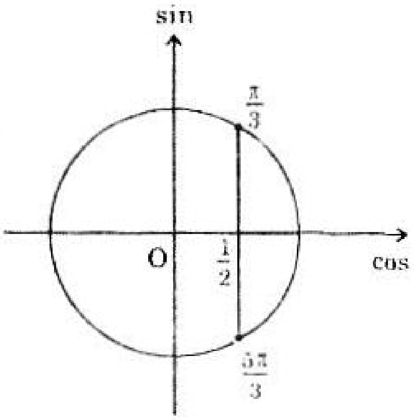
Giải

Bất phương trình được viết thành:

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow k2\pi + \frac{\pi}{3} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow k2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k2\pi \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z}).$$



Đề 4.2

Giải bất phương trình: $\cos x(1 - 2\sin x) > 0$.

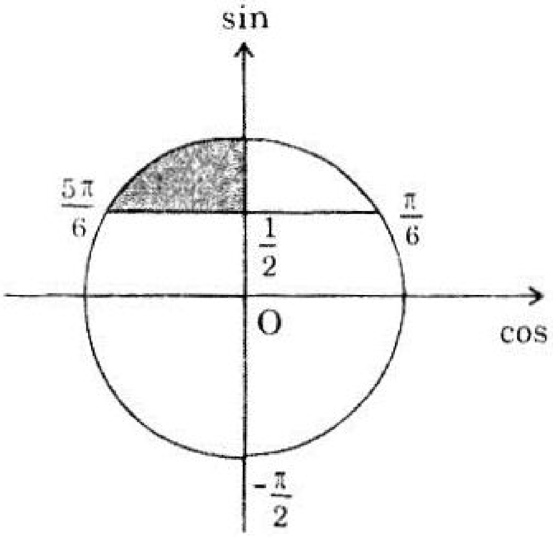
Giải

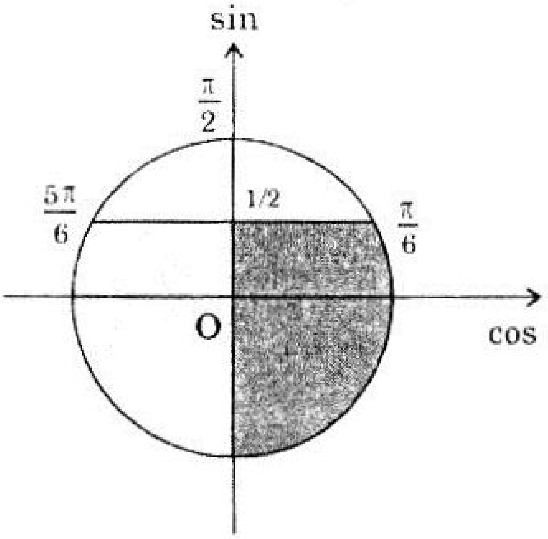
- *Cách 1:*

Bất phương trình được viết thành:

$$\begin{cases}\cos x > 0\\ 1 - 2\sin x > 0\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}\cos x < 0\\ 1 - 2\sin x < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x > 0\\ \sin x < \dfrac{1}{2}\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}\cos x < 0\\ \sin x > \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k2\pi - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{hay} \quad k2\pi + \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$





- *Cách 2:*

Đặt $f(x) = \cos x(1 - 2\sin x)$

Hàm số $f(x)$ có chu kì $T = 2\pi$ nên ta chỉ xét: $0 \le x \le 2\pi$

Ta có: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0$ hay $\sin x = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x = \frac{\pi}{2} \ \vee \ x = \frac{3\pi}{2}\right) \text{ hay } \left(x = \frac{\pi}{6} \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6}\right)$$

Bảng xét dấu:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f(x)		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

(Với $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right) < 0$ nên $f(x)$ mang dấu – với $x \in \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ và từ đó suy ra các phần còn lại)

Vậy $\quad f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k2\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$

$$\text{hay} \quad k2\pi + \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

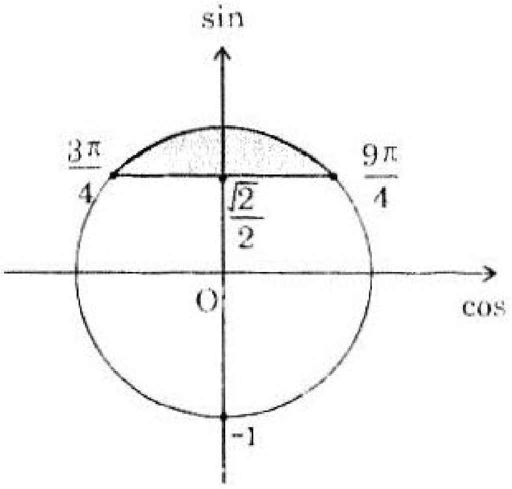
$$\text{hay} \quad k2\pi + \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi + k2\pi$$

Lưu ý: Kết quả của cách giải 2 có hình thức khác với kết quả đã có ở trên nhưng nội dung thì chỉ là một.

Đề 4.3

Giải bất phương trình: $\sin 2x - \cos 2x \le 1$.

Giải


sin
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
O
cos
-1

Ta có: $\sin 2x - \cos 2x \le 1$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

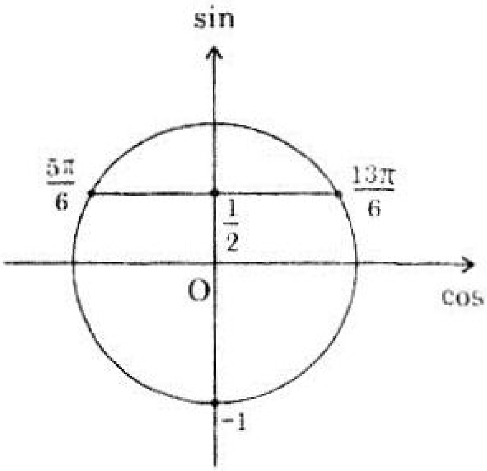
$$\Leftrightarrow \quad k2\pi + \frac{3\pi}{4} \le 2x - \frac{\pi}{4} \le \frac{9\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad k\pi + \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{4} + k\pi.$$

Đề 4.4

Giải bất phương trình: $\dfrac{\mathbf{2\sin^2 x + \sin x - 1}}{\mathbf{1 + \sin x}} \mathbf{< 0.}$

Giải


sin
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{13\pi}{6}$
$\frac{1}{2}$
O
cos
-1

Ta có: $1 + \sin x \ge 0$ với mọi x nên bất phương trình được biến thành:

$$\begin{cases} 2\sin^3 x + \sin x - 1 < 0 \\ \sin x \ne -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 < \sin x < \dfrac{1}{2} \\ \sin x \ne -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < \sin x < \frac{\pi}{2}$$

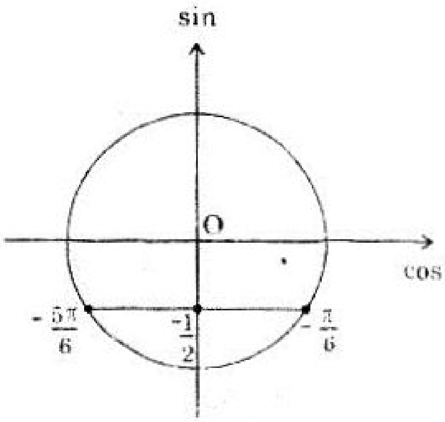
$$\Leftrightarrow \quad \frac{5\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{13\pi}{6} + k2\pi \quad \left(x \ne \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right).$$

Đề 4.5

Giải bất phương trình: $\mathbf{tgx + cotgx > -4.}$

Giải

Điều kiện: $(\cos x \ne 0$ và $\sin x \ne 0) \Leftrightarrow x \ne k\frac{\pi}{2}$


sin
O
cos
$-\frac{5\pi}{6}$
$\frac{-1}{2}$
$-\frac{\pi}{6}$

Ta có: $tgx + cotgx > -4$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin x \cos x} + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sin 2x} + 4 > 0 \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{2 + 4\sin 2x}{\sin 2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x(4\sin 2x + 2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x < -\frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad \sin 2x > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{5\pi}{6} + k2\pi < 2x < -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{hay} \quad k2\pi < 2x < \pi + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{5\pi}{12} + k\pi < x < -\frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{hay} \quad k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Kết luận: $-\frac{5\pi}{12} + k\pi < x < -\frac{\pi}{12} + k\pi$ hay $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \left(x \neq k\frac{\pi}{2}\right)$.

Đề 4.6

Giải bất phương trình: $\sin 3x + \sin x < \sin 2x$.

Giải

Ta có: $\sin 3x + \sin x < \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin 2x\cos x - \sin 2x < 0$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x\,(2\cos x - 1) < 0$$

Đặt $f(x) = \sin 2x\,(2\cos x - 1)$ thì $f(x)$ có chu kì $T = 2\pi$

nên ta chỉ cần xét với $0 \leq x \leq 2\pi$.

Ta có: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = 0$ hay $\cos x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = k\pi \quad \text{hay} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2} \quad \text{hay} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Với $0 \leq x \leq 2\pi$ nên:

$x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = 2\pi$

Bảng xét dấu:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f(x)	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0

(với $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2} - 1) > 0$ nên $f(x) > 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$)

Vậy nghiệm của bất phương trình là:

$$\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{hay} \quad \pi + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi.$$

Đề 4.7

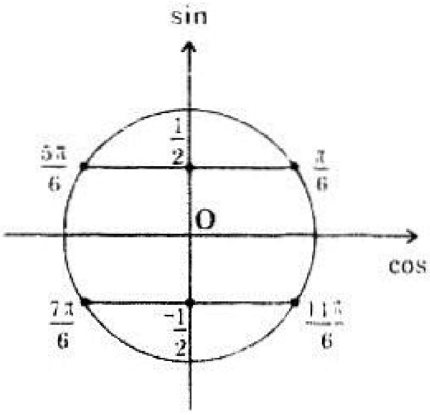
Giải các bất phương trình sau:

a) $|\sin x| > \frac{1}{2}$ **b)** $|\cos x| \le \frac{1}{2}$

c) $|\text{tg}x| \le 1$ **d)** $|\text{cotg}x| < \sqrt{3}$

Giải

a) Ta có: $|\sin x| > \frac{1}{2}$

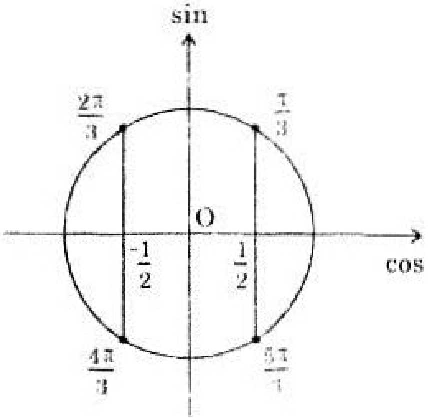

sin
$\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
O
cos
$\frac{7\pi}{6}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \quad -1 \le \sin x < -\frac{1}{2}$

hay $\frac{1}{2} < \sin x \le 1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{7\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{11\pi}{6} + k2\pi$

hay $\frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$


sin
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
O
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
cos
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$

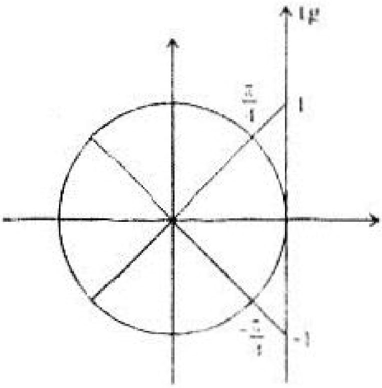
b) Ta có: $|\cos x| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \cos x \le \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} + k2\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

hay $\frac{4\pi}{3} + k2\pi \le x \le \frac{5\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} + k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + k\pi.$

c) Ta có:


tg
$\frac{\pi}{4}$
1
$-\frac{\pi}{4}$
-1

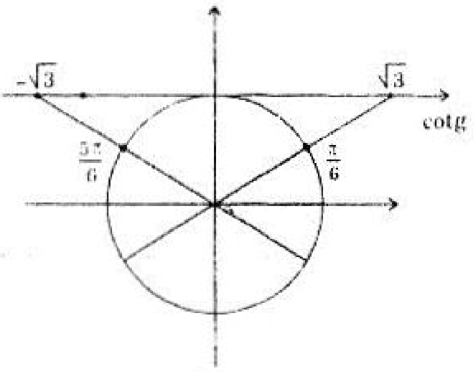
$|\text{tg}x| \le 1$

$\Leftrightarrow \quad -1 \le \text{tg}x \le 1$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k\pi$

(với $k \in \mathbb{Z}$).

d) Ta có:


$-\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$
cotg
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$

$|\text{cotg}x| < \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} < \text{cotg}x < \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi$

$(k \in \mathbb{Z}).$

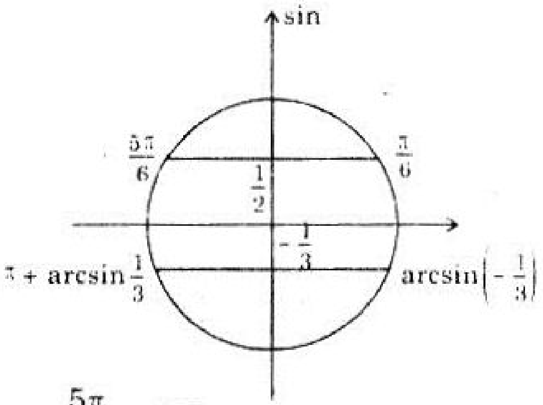
Đề 4.8

Giải các bất phương trình sau:

a) $-\frac{1}{3} \le \sin x < \frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2} < \cos x \le \frac{1}{4}$

c) $-2 < \text{tg}x < 3$ d) $-4 < \text{cotg}x \le \frac{3}{2}$.

Giải


sin
5π/6
π/6
1/2
-1/3
π + arcsin 1/3
arcsin(-1/3)

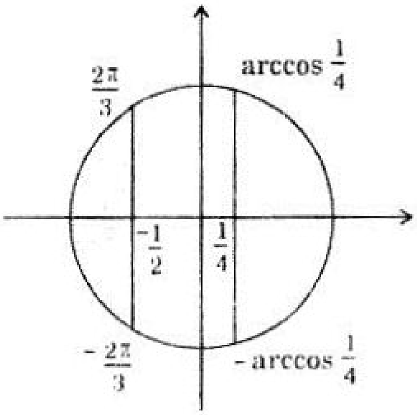
a) $$-\frac{1}{3} \le \sin x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + k2\pi \le x < \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

hay $\frac{5\pi}{6} + k2\pi < x \le \arcsin\frac{1}{3} + (1+2k)\pi$

(*Lưu ý:* $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$\sin x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + k2\pi \vee x = \pi + \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi$).


2π/3
arccos 1/4
-1/2
1/4
-2π/3
-arccos 1/4

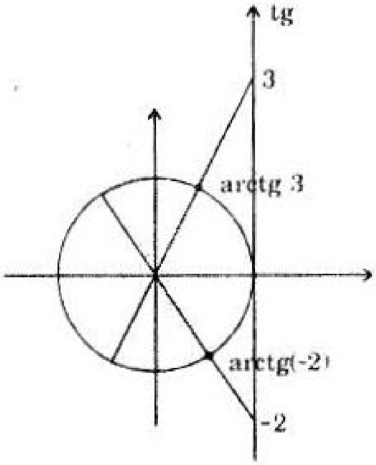
b) Ta có: $-\frac{1}{2} < \cos x \le \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow k2\pi - \frac{2\pi}{3} < x \le -\arccos\frac{1}{4} + k2\pi$$

hay $\arccos\frac{1}{4} + k2\pi \le x < \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

(*Lưu ý:* $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\cos x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\arccos\frac{1}{4} + k2\pi$).


tg
3
arctg 3
arctg(-2)
-2

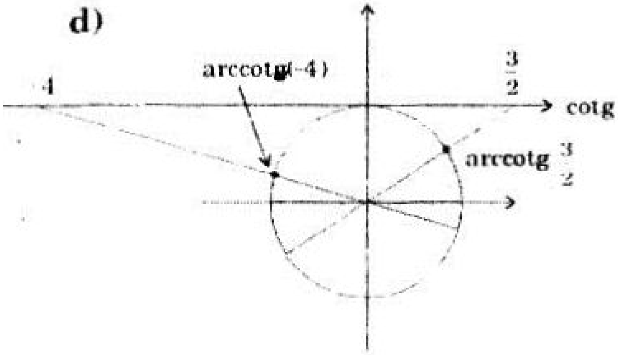
c) $$-2 < \text{tg}x < 3$$

$\Leftrightarrow \text{arctg}(-2) + k\pi < x < \text{arctg}3 + k\pi$

(với $\text{tg}x = 3 \Leftrightarrow x = \text{arctg}3 + k\pi$,

$\text{tg}x = -2 \Leftrightarrow x = \text{arctg}(-2) + k\pi$).

d)


-4
arccotg(-4)
3/2
cotg
arccotg 3/2

$$-4 < \text{cotg}x \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{arccotg}(-4) + k\pi < x \le \text{arccotg}\frac{3}{2} + k\pi$$

(với $k \in \mathbb{Z}$).

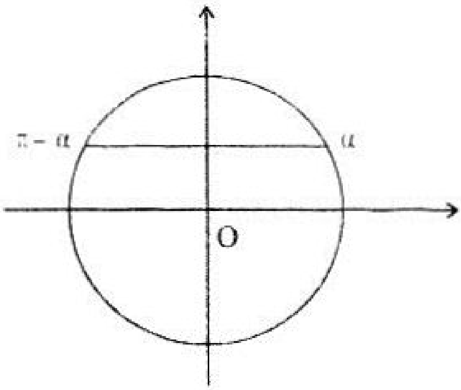
Đề 4.9

Giải các bất phương trình sau:

a) $2\sin^2x + \sqrt{3}\sin x - 3 > 0$ **b)** $\cos 2x + 5\cos x + 3 \geq 0.$

Giải

a) Đặt $t = \sin x \ (-1 \leq t \leq 1)$.



Bất phương trình được viết thành:

$$2t^2 + \sqrt{3}\,t - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t < \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{27}}{4} \quad \text{hay} \quad t > \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{27}}{4}$$

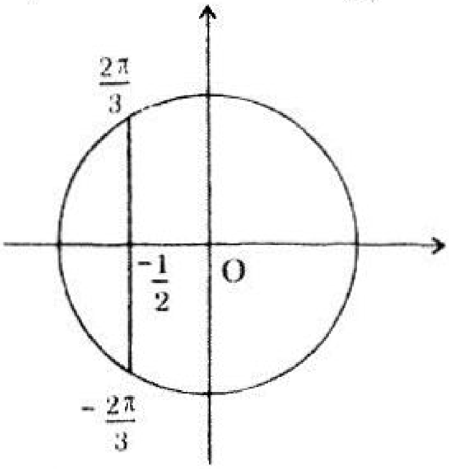
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\left(-\sqrt{3} + \sqrt{27}\right) \leq t$$

$$\left(\text{vì } \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{27}}{4} < -1, \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{27}}{4} < 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}(\sqrt{27} - \sqrt{3}) < \sin x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha + k2\pi < x < \pi - \alpha + k2\pi \qquad \left(\text{với } \sin\alpha = \frac{1}{4}\left(\sqrt{27} - \sqrt{3}\right) 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Đặt $t = \cos x \ (-1 \leq t \leq 1)$



Bất phương trình được biến thành:

$$2\cos^2x - 1 + 5\cos x + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2t^2 + 5t + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t \leq -2 \quad \text{hay} \quad t \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \ (\text{vì } -1 \leq t \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

Đề 4.10

Giải các bất phương trình sau:

a) $\mathrm{tg}^2x + (2 - \sqrt{3})\mathrm{tg}x - 2\sqrt{3} < 0$ **b)** $\mathrm{cotg}^2x + \mathrm{cotg}x > 0$

c) $2(\sqrt{2} - 1)\sin x - 2\cos 2x + 2 - \sqrt{2} < 0$ **d)** $\cos\pi x + \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) > 0.$

Giải

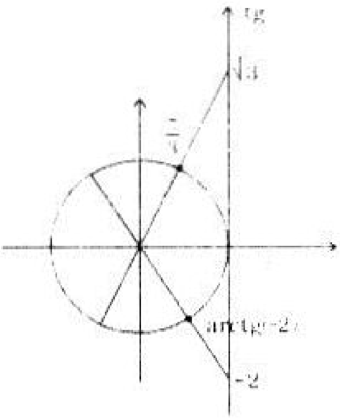
a) Đặt $t = \mathrm{tg}x$ thì bất phương trình trở thành:

$t^2 + (2 - \sqrt{3})t - 2\sqrt{3} < 0$

$\Leftrightarrow\ -2 < t < \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\ -2 < \text{tg}x < \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\ \text{arctg}(-2) + k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$



b) Đặt t = cotgx thì bất phương trình trở thành:

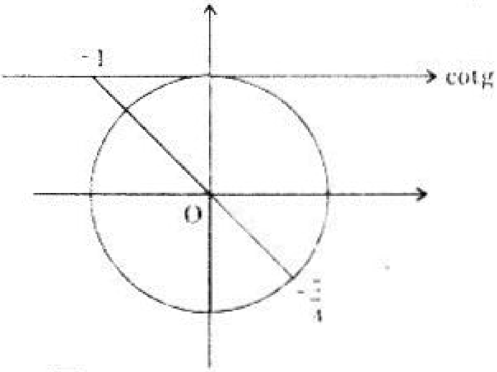
$t^2 + t > 0$

$\Leftrightarrow\ t < -1$ hay $t > 0$

$\Leftrightarrow\ \text{cotg}x < -1$ hay $\text{cotg}x > 0$

$\Leftrightarrow\ -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

(với $x \neq k\pi$).



c) Ta có:

$2(\sqrt{2} - 1)\sin x - 2\cos 2x + 2 - \sqrt{2} < 0$

$\Leftrightarrow\ 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - 2(1 - 2\sin^2 x) + 2 - \sqrt{2} < 0$

$\Leftrightarrow\ 4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - \sqrt{2} < 0$

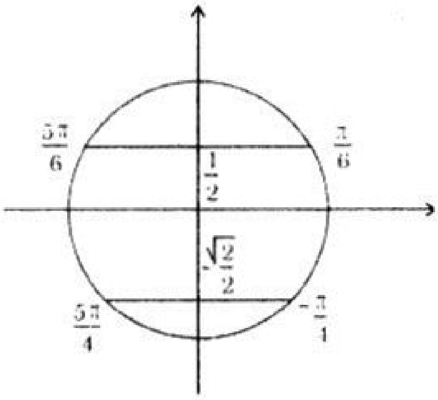
$\Leftrightarrow\ 4t^2 + 2(\sqrt{2} - 1)t - \sqrt{2} < 0$ (với $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$)

$\left(\text{với } \Delta' = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 + 4\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2, t_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, t_2 = \dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < t < \dfrac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\ -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$

hay $\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi < x < \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi.$



d) Ta có: $\cos\pi x + \sin\left(\pi x - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$

$\Leftrightarrow\ \cos\pi x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\pi x - \cos\pi x) > 0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos\pi x + \sin\pi x - \cos\pi x > 0$

$\Leftrightarrow\ (\sqrt{2} - 1)\cos\pi x + \sin\pi x > 0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\cos\pi x + \dfrac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\sin\pi x > 0$

(chia cho $\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$)

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\pi x + \alpha) > 0 \qquad \left(\text{với } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad k2\pi < \pi x + \alpha < \pi + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\alpha}{\pi} + 2k < x < -\frac{\alpha}{\pi} + 1 + 2k \ (\text{với } k \in \mathbb{Z}).$$

Đề 4.11

Giải các bất phương trình sau:

a) $\cos^3x\sin3x + \cos3x\sin^3x < \frac{3}{8}$ **b)** $\cos x\cos2x\cos3x \le 0.$

Giải

a) Bất phương trình được biến thành:

$$4\cos^3x.\sin3x + \cos3x.4\sin^3x < 3$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos3x + 3\cos x)\sin3x + \cos3x(3\sin x - \sin3x) < 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cos x\sin3x + 3\sin x\cos3x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sin3x\cos x + \sin x\cos3x < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin4x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \ne \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x \ne \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}.$$

Vậy: $x \ne \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ là nghiệm của bất phương trình.

b) Ta có: $\cos x.\cos2x.\cos3x \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\cos3x.\cos x)\cos2x \le 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos4x - \cos2x)\cos2x \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\cos^2 2x - \cos2x - 1)\cos2x \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2t^2 - t - 1) \le 0 \quad (\text{với } t = \cos2x\ ,\ -1 \le t \le 1) \qquad (1)$$

Ta có: $(2t^2 - t - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0,\ t = 1,\ t = -\frac{1}{2}$

Bảng xét dấu:

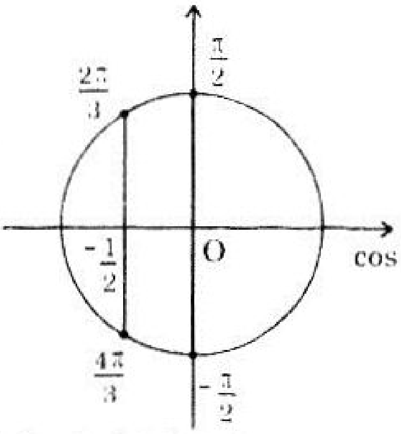
t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$t\,(2t^2 - t - 1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó: $(1) \Leftrightarrow -1 \le t \le -\frac{1}{2}$ hay $0 \le t \le 1$

$$\Leftrightarrow -1 \le \cos2x \le -\frac{1}{2} \ \text{ hay } \ 0 \le \cos2x \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \le 2x \le \frac{4\pi}{3} + k2\pi$$

$$\text{hay} \quad -\frac{\pi}{2} + k2\pi \le 2x \le \frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad \text{hay} \quad -\frac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Đề 4.12

Giải các bất phương trình sau:

a) $\sin^4x + \cos^4x > \frac{1}{2}$ b) $\sin^6x + \cos^6x > \frac{5}{8}$

c) $8\sin^6x - \cos^6x > 0$ d) $\text{tg}3x\text{tg}x < -1$.

Giải

a) Ta có: $\sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x)^2 + (\cos^2x)^2 = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{3 + \cos 4x}{4}$$

Do đó: $\cos^4x + \sin^4x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3 + \cos 4x}{4} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 + \cos 4x > 2$

$$\Leftrightarrow \cos 4x > -1 \Leftrightarrow 4x \neq \pi + k2\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Ta có: $\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x)^3 + (\cos^2x)^3$

$$= (\sin^2x + \cos^2x)(\sin^4x + \cos^4x - \sin^2x\cos^2x)$$

$$= \sin^4x + \cos^4x - \sin^2x\cos^2x$$

$$= \frac{3 + \cos 4x}{4} - \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{3 + \cos 4x}{4} - \frac{(1 - \cos 4x)}{4.2}$$

$$= \frac{5 + 3\cos 4x}{8}$$

Do đó: $\sin^6x + \cos^6x > \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{5 + 3\cos 4x}{8} > \frac{5}{8} \Leftrightarrow \cos 4x > 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi < 4x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Đặt $t = \sin^2x$ $(0 \leq t \leq 1)$ thì:

$8\sin^6x - \cos^6x > 0 \Leftrightarrow 8\sin^6x - (1 - \sin^2x)^3 > 0$

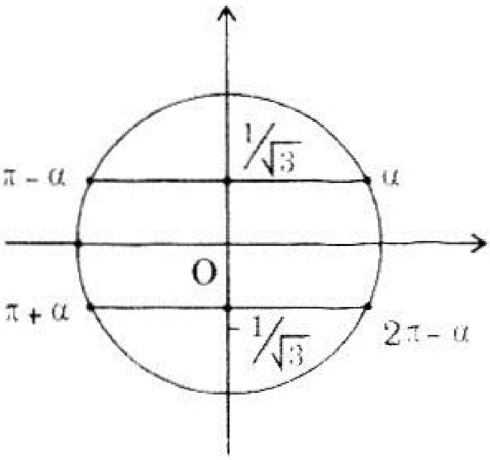
$\Leftrightarrow 8t^3 - (1 - t)^3 > 0 \Leftrightarrow 8t^3 - (1 - 3t + 3t^2 - t^3) > 0$

$\Leftrightarrow 9t^3 - 3t^2 + 3t - 1 > 0 \Leftrightarrow 3t^2(3t - 1) + (3t - 1) > 0$

$\Leftrightarrow (3t - 1)(3t^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow 3t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{3}$

Do đó: $\frac{1}{3} < t \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \sin^2x \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < |\sin x| \le 1$



$\Leftrightarrow \quad -1 \le \sin x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $\frac{1}{\sqrt{3}} < \sin x \le 1$

$\Leftrightarrow \quad \pi + \alpha + k2\pi < x < 2\pi - 2 + k2\pi$

hay $\quad \alpha + k2\pi < x < \pi - \alpha + k2\pi$

(với $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$)

Kết luận: $\alpha + k\pi < x < \pi - \alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

d) Điều kiện: $\cos x \ne 0$ và $\cos 3x \ne 0 \Leftrightarrow \cos 3x \ne 0$

Ta có: $\mathrm{tg}3x\mathrm{tg}x < -1 \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos 3x}.\frac{\sin x}{\cos x} < -1 \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos 3x}.\frac{\sin x}{\cos x} + 1 < 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x}{\cos 3x \cos x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos 2x}{\cos 3x \cos x} < 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 3x \cos x.\cos 2x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)\cos 2x < 0$

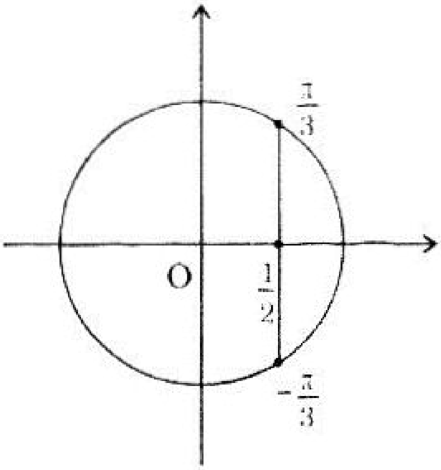
$\Leftrightarrow \quad (2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x)\cos 2x < 0$

$\Leftrightarrow \quad (2t^2 + t - 1)t < 0$ (với $t = \cos 2x$, $-1 \le t \le 1$)

Bảng xét dấu:

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$t(2t^2+t-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình cho ta:



$0 < t < \frac{1}{2}$ (vì $-1 \le t \le 1$)

$\Leftrightarrow \quad 0 < \cos 2x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k2\pi < 2x < -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

hay $\quad \frac{\pi}{3} + k2\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi$ hay $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$

Điều kiện cho ta: $3x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$

Kết luận: $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi$ hay $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Đề 4.13

Giải bất phương trình: $3\sin 2x - 1 > \sin x + \cos x$.

Giải

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \left(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right)$

thì: $t^2 = 1 + \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = t^2 - 1$

Bất phương trình trở thành:

$$3(t^2 - 1) - 1 > t \quad \Leftrightarrow \quad 3t^2 - t - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} \le t < -1 \quad \text{hay} \quad \frac{4}{3} < t \le \sqrt{2} \quad (\text{do } -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2})$$

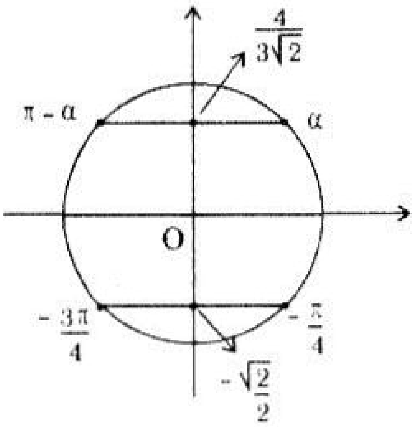
$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -1 \quad \text{hay} \quad \frac{4}{3} < \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{hay} \quad \frac{4}{3\sqrt{2}} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{3\pi}{4} + k2\pi < x + \frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\text{hay} \quad \alpha + k2\pi < x + \frac{\pi}{4} < \pi - \alpha + k2\pi$$

$$\left(\text{với } \sin\alpha = \frac{4}{3\sqrt{2}},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\Leftrightarrow \quad (2k - 1)\pi < x < -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\text{hay} \quad \alpha - \frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z}).$$

Đề 4.14

Giải bất phương trình: $\sin 2x > \sqrt{2}\sin^2 x + (2 - \sqrt{2})\cos^2 x$.

Giải

Bất phương trình được viết thành:

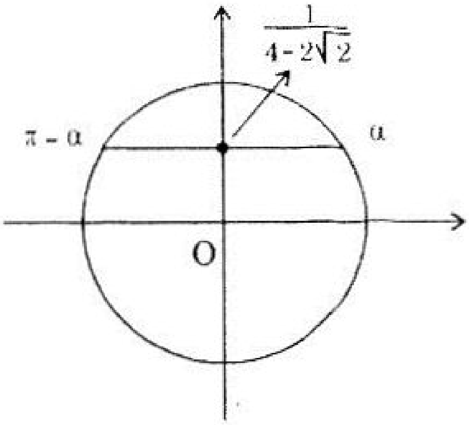
$$\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{2 - \sqrt{2}}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x > 1 + (1 - \sqrt{2})\cos 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x + (\sqrt{2} - 1)\cos 2x > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\sin 2x + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\cos 2x > \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(2x + \varphi) > \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

$$\left(\text{với } \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\right)$$



$$\Leftrightarrow \quad \alpha + k2\pi < 2x + \varphi < \pi - \alpha + k2\pi$$

$$\left(\text{với } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\right)$$

Vậy: $\frac{\alpha - \varphi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi - \alpha - \varphi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Đề 4.15

Giải các bất phương trình:

a) $|\sin x| > \cos^2 x$ **b)** $\sqrt{5 - 2\sin x} \ge 6\sin x - 1$.

Giải

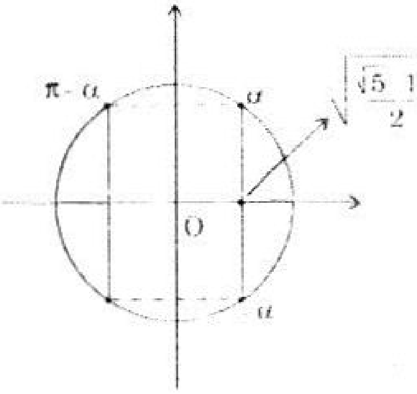
a) Ta có: $|\sin x| > \cos^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x > \cos^4 x$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2 x > \cos^4 x \quad \Leftrightarrow \quad \cos^4 x + \cos^2 x - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 + t - 1 < 0 \quad (\text{với } t = \cos^2 x,\ 0 \le t \le 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{5}\right) < t < \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right) \ (0 \le t \le 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le t < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$



$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \cos^2 x < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} < \cos x < \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha + k\pi < x < \pi - \alpha + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \quad \left(\text{với } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ và } \cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}\right)$$

b) Ta có: $5 - 2\sin x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (vì $\sin x \le 1$)

Bất phương trình được viết thành:

$$\sqrt{5 - 2\sin x} \ge 6\sin x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6\sin x - 1 \le 0$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} 5 - 2\sin x \ge (6\sin x - 1)^2 & (1) \\ 6\sin x - 1 > 0 & (2) \end{cases}$$

i) Xét: $6\sin x - 1 \le 0 \Leftrightarrow \sin x \le \frac{1}{6}$

$$\Leftrightarrow \pi - \arcsin\frac{1}{6} + k2\pi \le x \le 2\pi + \arcsin\frac{1}{6} + k2\pi$$

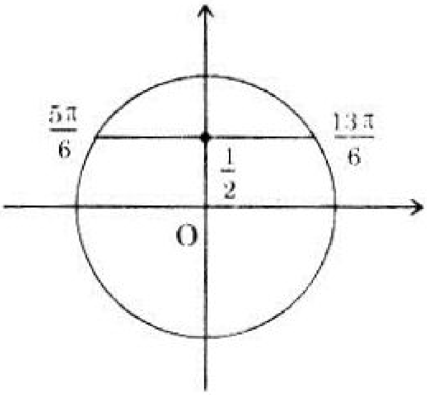
ii) Xét: (1) $\Leftrightarrow 5 - 2\sin x \ge 36\sin^2 x - 12\sin x + 1$

$\Leftrightarrow 36\sin^2 x - 10\sin x - 4 \le 0$

$\Leftrightarrow 18\sin^2 x - 5\sin x - 2 \le 0$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{9} \le \sin x \le \frac{1}{2}$

mà (2) $\Leftrightarrow \sin x > \frac{1}{6}$



Nên (1) và (2) cho ta: $\frac{1}{6} < \sin x \le \frac{1}{2}$

Do đó nghiệm của bất phương trình là:

$$\sin x \le \frac{1}{6} \quad \text{hay} \quad \frac{1}{6} < \sin x \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \le \frac{1}{2}$$

Vậy: $k2\pi + \frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{13\pi}{6} + k2\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

Đề 4.16

Giải các bất phương trình sau:

a) $1 - \cos x < \operatorname{tg}x - \sin x$ **b)** $9^{1+\sin^2 nx} + 30.9^{\cos^2 nx} \le 117$.

Giải

a) Điều kiện: $\cos x \ne 0$

Ta có: $1 - \cos x < \operatorname{tg}x - \sin x \Leftrightarrow 1 - \cos x < \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x$

$\Leftrightarrow \cos x(1 - \cos x) < \sin x(1 - \cos x)$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\sin x - \cos x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x > 0 & (1) \\ \cos x \ne 1 & (2) \end{cases}$

Với (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

$\Leftrightarrow k2\pi < x - \frac{\pi}{4} < \pi + k2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k2\pi$

Các điều kiện là: $\cos x \ne 0$ và $\cos x \ne 1 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x \ne k2\pi$

Vậy nghiệm cuả bất phương trình là:

$$\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k2\pi \quad \left(x \ne \frac{\pi}{2} + k2\pi\right).$$

b) $9^{1+\sin^2\pi x} + 30.9^{\cos^2\pi x} \le 117 \Leftrightarrow 9.9^{\sin^2\pi x} + 30.9^{1-\sin^2\pi x} \le 117$

$\Leftrightarrow 9.9^t + 30.9.9^{-t} \le 117$ (với $t = \sin^2\pi x$, $0 \le t \le 1$)

$\Leftrightarrow 9^t + 30.9^{-t} \le 13 \Leftrightarrow (9^t)^2 + 30 \le 13.9^t$

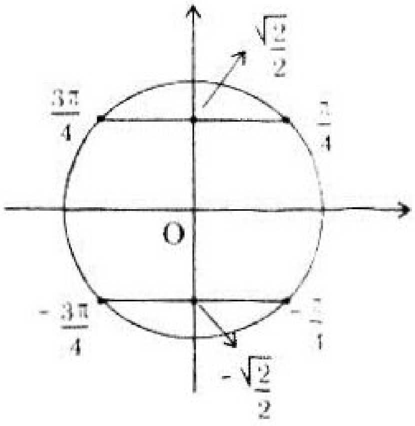
$\Leftrightarrow (9^t)^2 - 13.9^t + 30 \le 0 \Leftrightarrow 3 \le 9^t \le 10$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $1 \le 9^t \le 9$ nên chỉ nhận:

$$3 \le 9^t \le 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le 3^{2t} \\ 9^t \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le 2t \\ t \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le t \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \sin^2\pi x \le 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \le \sin\pi x \le -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hay } \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\pi x \le 1$$



$$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \le \pi x \le -\frac{\pi}{4} + k2\pi \vee \frac{\pi}{4} + k2\pi \le \pi x \le \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi \le \pi x \le \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} + k \le x \le \frac{3}{4} + k \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z})$$

Đề 4.17

Giải bất phương trình: $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$.

Giải

Điều kiện: $(\sin x \ge 0,\ \cos x \ge 0) \Leftrightarrow k2\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Ta có: $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sqrt{\sin x\cos x} > 1$

$$\Leftrightarrow t + 2\sqrt{\frac{t^2-1}{2}} > 1 \quad (\text{với } t = \sin x + \cos x,\ t^2 = 1 + 2\sin x\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(t^2-1)} > 1 - t \Leftrightarrow 1 - t < 0 \text{ hay } \begin{cases} 2(t^2-1) > (1-t)^2 \\ 1 - t \ge 0 \end{cases}$$

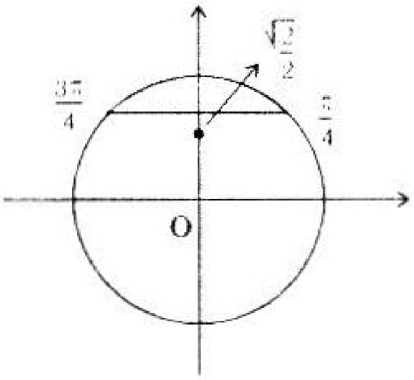
$$\Leftrightarrow t > 1 \text{ hay } \begin{cases} t^2 + 2t - 3 > 0 \\ t \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t > 1 \text{ hay } \begin{cases} t < -3 \vee t > 1 \\ t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow t > 1 \text{ hay } t < -3$$

- Với $t < -3$: $\sin x + \cos x < -3 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -3$.

Bất phương trình này là vô nghiệm vì $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge -\sqrt{2} > -3$.

- Với t > 1: $\sin x + \cos x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$



$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} + k2\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

Đề 4.18

Giải bất phương trình: $\sin x.\cos(\sin x) + \cos^2 x.\sin(\sin x) > 0$.

Giải

Xét: $0 < x < \pi$: Ta có: $0 < \sin x \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \sin x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \cos(\sin x) > 0$ và $\sin(\sin x) > 0$

$\Rightarrow \quad \sin x.\cos(\sin x) + \cos^2 x.\sin(\sin x) > 0$: Bất phương trình thỏa.

Xét: $\pi \le x \le 2\pi$: Ta có: $-1 \le \sin x \le 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \sin x \le 0$

$\Rightarrow \quad \sin(\sin x) \le 0\ ,\ \cos(\sin x) > 0$

$\Rightarrow \quad \sin x.\cos(\sin x) \le 0$ và $\cos^2 x.\sin(\sin x) \le 0$

$\Rightarrow \quad \sin x.\cos(\sin x) + \cos^2 x.\sin(\sin x) \le 0$: Bất phương trình không thỏa.

Kết luận: $k2\pi < x < \pi + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ là nghiệm.

Đề 4.19

Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm: $\frac{1}{2}\sin 2x + \sqrt{3}\sin^2 x \ge m$.

Giải

Bất phương trình được viết thành:

$$\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \cos 2x) \ge m \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x \ge 2m - \sqrt{3}$$

Ta có bất phương trình vô nghiệm khi:

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x < 2m - \sqrt{3} \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Max}\,(\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x) < 2m - \sqrt{3} \qquad (*)$$

Mà theo bất đẳng thức Svac-xơ, thì:

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x \le \sqrt{(1+3)(\sin^2 2x + \cos^2 2x)} = 2$$

nên $\text{Max}\,(\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x) = 2$

và (*) cho ta: $2 < 2m - \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad m > \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})$

Vậy: $m > \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Đề 4.20

Tìm m để bất phương trình sau đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{m\cos^2 x - m + m^2}{m^2 + 1 - m\cos^2 x} > 0 \qquad (*)$$

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \quad (m\cos^2 x - m + m^2)(m^2 + 1 - m\cos^2 x) > 0$

$\Leftrightarrow \quad (mt - m + m^2)(m^2 + 1 - mt) > 0$ (với $t = \cos^2 x$, $0 \le t \le 1$)

$\Leftrightarrow \quad (mt - m + m^2)(-mt + m^2 + 1) > 0$

Đặt: $f(t) = (mt - m + m^2)(-mt + m^2 + 1)$

($f(t)$ là tam thức bậc hai với hệ số $a = -m^2 < 0$)

Để bất phương trình (*) đúng với mọi x thì phải có:

$$f(t) > 0,\ \forall t \in [0, 1] \quad \Leftrightarrow \quad t_1 < 0 < 1 < t_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} af(0) < 0 \\ af(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \quad (\text{vì } a = -m^2 < 0)$$

$f(0) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m^2 - m)(m^2 + 1) > 0$

$\Leftrightarrow \quad m^2 - m > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < 0 \vee m > 1$

$f(1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2(m^2 - m + 1) > 0$: luôn đúng vì $m^2 - m + 1 > 0$ với $\forall m$

Vậy: $m < 0 \vee m > 1$ là giá trị của m cần tìm.

Đề 4.21

Chứng minh rằng mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ đều là nghiệm của bất phương trình:

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8 \qquad (*)$$

Giải

Với $0 < x < \frac{\pi}{4}$ thì: $\cos x > 0, \quad 0 < \mathrm{tg}x < 1$

Bất phương trình (*) được viết thành:

$$\frac{1}{\sin^2 x(1 - \mathrm{tg}x)} > 8 \quad \text{(chia tử và mẫu của vế trái cho cosx)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 + t^2}{t^2(1 - t)} > 8 \quad \left(\text{với } t = \mathrm{tg}x,\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad 1 + t^2 > 8t^2(1 - t) \quad$ (vì $t < 1$ nên: $1 - t > 0$)

$\Leftrightarrow \quad 8t^3 - 7t^2 + 1 > 0 \qquad (1)$

Xét: $f(t) = 8t^3 - 7t^2 + 1$ với $0 < t < 1$

$f(t) = 24t^2 - 14t = 2t(12t - 7)$

$f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0, \quad t = \frac{7}{12}$

t	0		$\frac{7}{12}$		1
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{356}{12^3}$	$\nearrow$	

Suy ra rằng $f(t) > 0$ với mọi $t \in (0; 1)$ tức là (1) luôn đúng với mọi $0 < t < 1$ và do đó (*) đúng với mọi $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Đề 4.22

Tìm nghiệm của bất phương trình: $\sqrt{3}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x \geq \sqrt{3}$

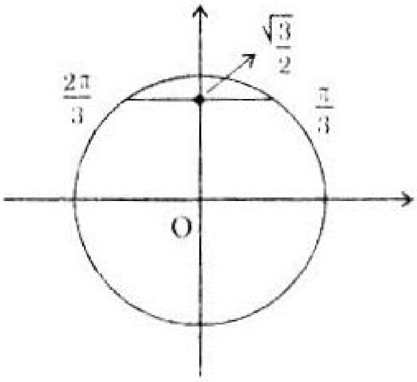
thỏa điều kiện: $\lg(x^2 + x + 1) < 1$.

Giải

Ta có: $\lg(x^2 + x + 1) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lg(x^2 + x + 1) < \lg 10$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x + 1 < 10 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 9 < 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{37}\right) < x < \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{37}\right)$



Ta lại có: $\sqrt{3}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x \geq \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}\sin 2x \geq \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} + k2\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad$ (với $k \in \mathbb{Z}$)

Do điều kiện $\frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{37}\right) < x < \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{37}\right)$ nên ta chỉ nhận :

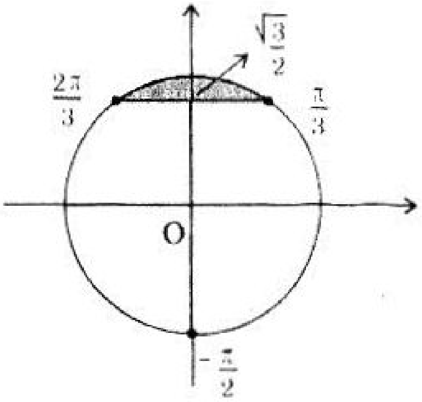
$-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$ hay $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (ứng với $k = -1 \vee k = 0$).

Đề 4.23

Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} \sin x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x > -\dfrac{1}{2} \\ \cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Giải


$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
O
$-\frac{\pi}{2}$

a) Ta có: $\sin x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

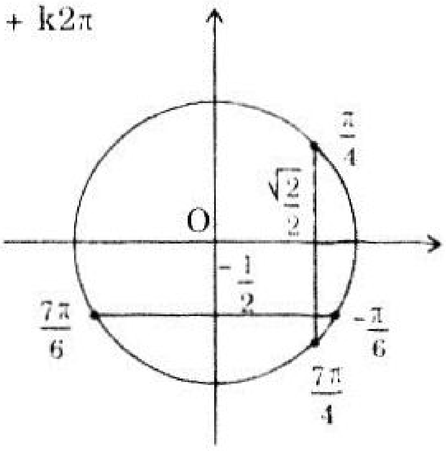
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{4\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

(*Lưu ý:* $\dfrac{2\pi}{3}$ và $-\dfrac{4\pi}{3}$ có cùng biểu diễn trên đường tròn lượng giác).

$$\cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Vậy nghiệm của hệ là: $-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

b) $\sin x > -\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi < x < \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$


$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
O
$-\frac{1}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$\frac{7\pi}{4}$

$\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{7\pi}{4} + k2\pi$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đề 4.24

Giải và biện luận theo tham số m bất phương trình:

$$(m + 1)\cos 2x + m(\sin x + \cos x)^2 < 0.$$

Giải

- Xét $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$: Ta có: $\cos 2x = \cos\pi = -1$, $\cos x = 0$, $\sin x = \pm 1$

nên thế vào bất phương trình thì có: $-(m + 1) + m < 0$: điều này luôn đúng.

- Xét $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$: Bất phương trình được viết thành:

$$(m+1)\cos 2x + m(1+\sin 2x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (m+1).\frac{1-t^2}{1+t^2} + m\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right) < 0 \quad (\text{với } t = tgx)$$

$$\Leftrightarrow \quad (m+1)(1-t^2) + m(t^2+1+2t) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (m+1)(1-t^2) + m(t+1)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t+1)[(m+1)(1-t) + m(t+1)] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t+1)(-t+2m+1) < 0 \qquad (*)$$

Xét $(t+1)(-t+2m+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = -1, \ t_2 = 2m+1$

i) Nếu $m > -1$: thì $t_2 = 2m+1 > -1 = t_1$

Lúc đó:

$$(*) \Leftrightarrow \quad t < t_1 \vee t > t_2 \quad \Leftrightarrow \quad t < -1 \vee t > 2m+1$$

$$\Leftrightarrow \quad tgx < -1 \quad \text{hay} \quad tgx > 2m+1$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{hay} \quad \alpha + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\left(\text{với } tg\alpha = 2m+1, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

ii) Nếu $m = -1$: thì $t_1 = t_2 = -1$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \quad (t+1)^2 > 0 \Leftrightarrow \quad t+1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \neq -1$

$$\Leftrightarrow \quad tgx \neq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

iii) Nếu $m < -1$: thì có $t_2 = 2m+1 < t_1 = -1$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow \quad t < 2m+1 \vee t > -1$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha + k\pi \vee \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$(\text{trong đó } tg\,\alpha = 2m+1, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

Kết luận:

- Nếu $m > -1$: $\quad -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee \alpha + k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Nếu $m = -1$: $\quad x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$
- Nếu $m < -1$: $\quad -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < \alpha + k\pi \vee -\frac{\pi}{4} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$(\text{với } tg\alpha = 2m+1, \ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}).$$

Đề 4.25

Cho biết bất phương trình sau thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$a\cos x + b\sin x + c\cos 2x + d\sin 2x \le \sqrt{c^2 + d^2}\ .$$

Chứng minh $a = b = 0$.

Giải

- *Nếu $c = d = 0$:*

Bất phương trình trở thành: $a\cos x + b\sin x \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: với $x = 0$, ta có: $a \le 0$

với $x = \pi$, ta có: $-a \le 0 \iff a \ge 0$, do đó: $a = 0$

Lúc đó, bất phương trình là: $b\sin x \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

với $x = \dfrac{\pi}{2}$ thì $b \le 0$

với $x = -\dfrac{\pi}{2}$ thì $-b \le 0 \iff b \ge 0$; do vậy: $b = 0$

Ta đã chứng minh rằng: $a = b = 0$

- *Nếu $c \ne 0$ hoặc $d \ne 0$:* (tức là: $\sqrt{c^2 + d^2} > 0$)

Bất phương trình được viết thành:

$$a\cos x + b\sin x + c\cos 2x + d\sin 2x \le r \qquad (\text{với } r = \sqrt{c^2 + d^2})$$

$$\iff a\cos x + b\sin x + r\left(\frac{c}{r}\cos 2x + \frac{d}{r}\sin 2x\right) \le r$$

$$\iff a\cos x + b\sin x + r(\cos 2\varphi\cos 2x + \sin 2\varphi\sin 2x) \le r$$

$$\left(\text{với } \cos 2\varphi = \frac{c}{r},\ \sin 2\varphi = \frac{d}{r}\right)$$

$$\iff a\cos x + b\sin x + r\cos(2x - 2\varphi) \le r\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Thay x bởi $x + \varphi$, ta có:

$$a\cos(x + \varphi) + b\sin(x + \varphi) + r\cos 2x \le r,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff a(\cos x\cos\varphi - \sin x\sin\varphi) + b(\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\cos x) + r\cos 2x \le r$$

$$\iff (a\cos\varphi + b\sin\varphi)\cos x + (b\cos\varphi - a\sin\varphi)\sin x + r\cos 2x \le r$$

$$\iff M\cos x + N\sin x + r\cos 2x \le r,\quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

$$(\text{với } M = a\cos\varphi + b\sin\varphi,\ N = b\cos\varphi - a\sin\varphi)$$

Với $x = 0$ thì $(*)$ cho ta: $M + r \le r \iff M \le 0$

Với $x = \pi$ thì $(*)$ cho ta: $-M + r \le r \iff M \ge 0$

Suy ra: $M = 0$

(*) trở thành: $N\sin x + r\cos 2x \le r \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \quad N\sin x + r(1 - 2\sin^2 x) \le r$$

$$\Leftrightarrow \quad 2r\sin^2 x - N\sin x \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x(2r\sin x - N) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

(1) cho ta: $\begin{cases} \sin x(2r\sin x - N) \ge 0, \forall x \in (0, \pi) \\ \sin x(2r\sin x - N) \ge 0, \forall x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2r\sin x - N \ge 0, \forall x \in (0, \pi) \ \ (\text{vì } 0 < x < \pi \text{ thì } \sin x > 0) \\ 2r\sin x - N \le 0, \forall x \in (\pi, 2\pi) \ \ (\text{vì } \pi < x < 2\pi \text{ thì } \sin x < 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N \le 2r\sin x, \forall x \in (0, \pi) \\ N \ge 2r\sin x, \forall x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} N \le 0 \ (\text{vì } 0 < x < \pi \text{ thì } 0 < 2r\sin x < 2r) \\ N \ge 0 \ (\text{vì } \pi < x < 2\pi \text{ thì } -1 < 2r\sin x < 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad N = 0$$

Tới đây ta có: $M = N = 0$, tức là:

$$\begin{cases} a\cos\varphi + b\sin\varphi = 0 \\ b\cos\varphi - a\sin\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

Kết luận: $a = b = 0$.

Đề 4.26

Giả sử bất phương trình: $a\cos 2x + b\cos x + 1 \ge 0$ thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng: $|a| + |b| \le 2$.

Giải

- *Xét $b = 0$:* Ta có: $a\cos 2x + 1 \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

  Với $x = 0$ thì: $a + 1 \ge 0$ nên: $a \ge -1$

  Với $x = \frac{\pi}{2}$ thì: $-a + 1 \ge 0$ nên: $a \le 1$

  Vì: $-1 \le a \le 1$ nên có: $|a| \le 1$

  Từ: $|a| \le 1$, $b = 0$ suy ra: $|a| + |b| \le 2$.

- *Xét $b > 0$:* Ta chia ra **hai** trường hợp:

  i) Với $a > 0$: Vì $a\cos 2x + b\cos x + 1 \ge 0,\ \forall x$

  nên: $a\cos\frac{4\pi}{3} + b\cos\frac{2\pi}{3} + 1 \ge 0 \quad \left(\text{chọn } x = \frac{2\pi}{3}\right)$

  $$\Rightarrow \quad -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + 1 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad a + b \le 2$$

  $$\Rightarrow \quad |a| + |b| \le 2 \quad (\text{vì } a > 0,\ b > 0 \text{ nên: } |a| = a, |b| = b)$$

ii) Với $a \leq 0$: Từ $a\cos 2x + b\cos x + 1 \geq 0, \forall x$

thì có $a\cos 2\pi + b\cos\pi + 1 \geq 0$ (chọn $x = \pi$)

$\Rightarrow a - b + 1 \geq 0 \Rightarrow b - a \leq 1$

$\Rightarrow |b| + |a| \leq 1$ ($b > 0$ nên $|b| = b$, $a \leq 0$ nên $|a| = -a$)

$\Rightarrow |b| + |a| \leq 2$.

- *Xét $b < 0$:* Từ $a\cos 2x + b\cos x + 1 \geq 0, \forall x$

Suy ra: $a\cos 2(x + \pi) + b\cos(x + \pi) + 1 \geq 0$ (thay x bởi $x + \pi$)

$\Rightarrow a\cos 2x - b\cos x + 1 \geq 0, \forall x$

$\Rightarrow a\cos 2x + b'\cos x + 1 \geq 0, \forall x$ (đặt $b' = -b > 0$)

$\Rightarrow |a| + |b| \leq 2$ (do kết quả trường hợp $b > 0$)

Kết luận: $|a| + |b| \leq 2$.

Đề 4.27

Tìm điều kiện về a, b, c để hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} a\cos^2 x + b\sin^2 x + c \geq 0 & (1) \\ a\sin^2 x + b\cos^2 x + c \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

i) Giả sử hệ có nghiệm, tức là tồn tại x thỏa: $\begin{cases} a\cos^2 x + b\sin^2 x + c \geq 0 \\ a\sin^2 x + b\cos^2 x + c \geq 0 \end{cases}$

Cộng vế ta có: $a + b + 2c \geq 0$ (*)

ii) Giả sử (*) là thỏa mãn.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \frac{a}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{b}{2}(1 - \cos 2x) + c \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a - b}{2}\right)\cos 2x + \left(\frac{a + b}{2} + c\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)\cos 2x + (a + b + 2c) \geq 0$$

(2) $\Leftrightarrow \frac{a}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{b}{2}(1 + \cos 2x) + c \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b - a}{2}\right)\cos 2x + \frac{a + b}{2} + c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (b - a)\cos 2x + (a + b + 2c) \geq 0$$

Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì $\cos 2x = 0$ nên thỏa (1) và (2), tức là hệ có nghiệm.

Vậy: $a + b + 2c \geq 0$ là điều kiện để hệ có nghiệm.

Đề 4.28

Giải và biện luận theo tham số m hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} \dfrac{1+\sin x}{\sin 2x} \le m & (1) \\ \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\dfrac{1-5\cos^4 3x}{2}\right) \le 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \quad \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\dfrac{1-5\cos^4 3x}{2}\right) \le \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-5\cos^4 3x}{2} \ge \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-5\cos^4 3x \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^4 3x \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(Lời giải trên được biểu diễn bởi 6 đầu cung sau đây trên đường tròn lượng giác: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$)

Với $x = \frac{\pi}{6}$: thế vào (1) thì có: $m \ge \dfrac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$

Với $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ thì $\sin 2x = 0$ nên (1) không thỏa.

Với $x = \frac{5\pi}{6}$ thì (1) cho: $m \ge \dfrac{1+\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3}$

Với $x = \frac{7\pi}{6}$ thì (1) cho: $m \ge \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Với $x = \frac{11\pi}{6}$ thế vào (1) thì: $m \ge \dfrac{1-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó ta có kết quả về biện luận như sau:

– Nếu $m \geq -\sqrt{3}$: hệ có nghiệm gồm:

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, \qquad x = \frac{11\pi}{6} + k2\pi$$

– Nếu $m \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$: hệ có nghiệm là:

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \qquad x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, \qquad x = \frac{11\pi}{6} + k2\pi$$

– Nếu $m \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$: hệ có nghiệm là:

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \qquad x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

– Nếu $m \geq \sqrt{3}$: hệ có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

– Nếu $m < -\sqrt{3}$: hệ vô nghiệm.

Chương V

BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Để giải các bất đẳng thức lượng giác người ta dùng các phép biến đổi lượng giác thích hợp hoặc sử dụng các bất đẳng thức thường dùng trong đại số như bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Svac-xơ. Ngoài ra còn có cả việc dùng các tính chất của hàm số như tính đơn điệu; tính lồi, lõm của đồ thị cũng như kết quả xét dấu của tam thức bậc hai.

Đề 5.1

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\cos(\cos x) > 0$ **với mọi** $x \in \mathbb{R}$

b) $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ **với mọi** $x \in \mathbb{R}$.

Giải

a) Ta có: $-1 \le \cos x \le 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên: $-\dfrac{\pi}{2} < \cos x < \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Do đó: $\cos(\cos x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Ta có: $\cos(\sin x) > \sin(\cos x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\sin x) - \sin(\cos x) > 0$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\sin x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2}\right).\sin\left(\frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2}\right) > 0 \qquad (*)$$

Ta lại có: $|\sin x - \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2} < \dfrac{\pi}{2}$

nên: $-\dfrac{\pi}{2} < \sin x - \cos x < \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\sin x - \cos x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2}\right) > 0 \qquad (1)$$

Ta cũng có: $|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2} < \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad -\dfrac{\pi}{2} < \sin x + \cos x < \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sin x + \cos x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2}\right) > 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra (*) là đúng.

Vậy: cos(sinx) > sin(cosx) với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Đề 5.2

Cho $0 \le x, y, z \le \pi$. Chứng minh rằng:

a) $$\frac{1}{2}(\sin x + \sin y) \le \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (1)$$

b) $$\frac{1}{3}(\sin x + \sin y + \sin z) \le \sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \qquad (2)$$

Giải

a) Ta có: $(1) \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \le \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\left[1 - \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] \ge 0$$

Bất đẳng thức này đúng vì $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \le 1$ nên $1 - \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \ge 0$

Và $0 \le \frac{x+y}{2} \le \pi$ nên $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \ge 0$

Vậy bất đẳng thức (1) đã được chứng minh xong.

b) Ta có:

$$\frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{4}\left(x+y+z+\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{2}+\frac{z}{2}+\frac{x+y+z}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x+y+4z}{6}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{x+y}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{3}+\frac{4z}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x+y}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x+y+z}{3}+z\right)\right]$$

Theo bất đẳng thức (1) ta có:

$$\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \sin\left[\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x+y+z}{3}+z\right)}{2}\right]$$

$$\ge \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+\sin\left(\frac{\frac{x+y+z}{3}+z}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\sin x + \sin y) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \sin z\right)\right]$$

$$\geq \frac{1}{4}\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{1}{4}(\sin x + \sin y + \sin z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{1}{4}(\sin x + \sin y + \sin z)$$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{1}{3}(\sin x + \sin y + \sin z)$$

Vậy bất đẳng thức (2) đã được chứng minh.

Đề 5.3

Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của ΔABC. Chứng minh rằng:

1. $\sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ **2.** $\frac{aA + bB + cC}{a+b+c} \geq \frac{\pi}{3}$ (*)

Giải

1. Trong ΔABC thì: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad a^2 = (b^2 + c^2 - 2ab) + 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad a^2 \geq 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a \geq 2\sqrt{bc}.\sin\frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

2. Ta có:

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{aA + bB + cC}{a+b+c} \geq \frac{A+B+C}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(aA + bB + cC) \geq (a+b+c)(A+B+C)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(aA + bB + cC) \geq (aA + bB + cC) + aB + bA + aC + bC + Cb + cA$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(aA + bB + cC) - (aB + bA + aC + cA + bC + Cb) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên là đúng vì trong tam giác ABC, ta có:

$$(a-b)(A-B) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad aA + bB - (aB + bA) \geq 0$$

$$(a-c)(A-C) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad aA + cC - (cA + aC) \geq 0$$

$$(b-c)(B-C) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad bB + cC - (cB + bC) \geq 0$$

Cộng vế 3 bất đẳng thức vừa nêu thì được bất đẳng thức cần chứng minh.

Đề 5.4

Cho Δ ABC không tù.

a) Chứng minh rằng: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \geq 2$

b) Chứng minh: $\sin^2A \sin^2B + \sin^2C \geq 1$

c) Chứng minh: $(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B) \geq 2(2 - \sin^2C)$

d) Suy ra rằng: $(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B)(1 + \sin^2C) > 4$.

Giải

a) $$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = \frac{1}{2}(1-\cos2A) + \frac{1}{2}(1-\cos2B) + 1 - \cos^2C$$
$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) - \cos^2C$$
$$= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2C$$
$$= 2 + \cos C\cos(A-B) - \cos^2C \text{ (vì } \cos(A+B) = -\cos C)$$
$$= 2 + \cos C(\cos(A-B) - \cos C)$$
$$= 2 + \cos C(\cos(A-B) + \cos(A+B))$$
$$= 2 + \cos C 2\cos A\cos B \geq 2$$

Vậy: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \geq 2$ (vì Δ không tù nên $\cos A \cos B \cos C \geq 0$).

b) Ta có: $\sin A\sin B \geq \sin A\sin B - \cos A\cos B$ (vì $\cos A \geq 0$, $\cos B \geq 0$)

$\Rightarrow$ $\sin A\sin B \geq -\cos(A+B) = \cos C$

$\Rightarrow$ $\sin^2A\sin^2B \geq \cos^2C$ (vì $\cos C \geq 0$)

$\Rightarrow$ $\sin^2A\sin^2B \geq 1 - \sin^2C$ $\Rightarrow$ $\sin^2A\sin^2B + \sin^2C \geq 1$.

c) Ta có: $(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B) = 1 + \sin^2A + \sin^2B + \sin^2A\sin^2B$

$= 1 + (\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C) + (\sin^2A\sin^2B + \sin^2C) - 2\sin^2C$

$\geq 1 + 2 + 1 - 2\sin^2C$ (do câu a và b)

$\geq 2(2 - \sin^2C)$.

d) Ta có: $(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B)(1 + \sin^2C) \geq 2(2 - \sin^2C)(1 + \sin^2C)$ (do câu c)

$\geq 2(2 + \sin^2C - \sin^4c)$

$\geq 2\left[2 + \sin^2C(1 - \sin^2C)\right]$

$\geq 2\,[2 + \sin^2C\cos^2C| \geq 4$.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$\begin{cases} \sin^2C \, . \, \cos^2C = 0 \\ \text{Các bất đẳng thức trong câu a) và b) trở thành đẳng thức} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos C = 0 \text{ (vì trong } \Delta \text{ thì } \sin C > 0 \\ \text{Khi } \cos C = 0 \text{ thì kết quả câu a) là đẳng thức} \\ \cos A = 0 \vee \cos\hat{B} = 0 \text{ (để có đẳng thức trong câu b)} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = \dfrac{\pi}{2} \\ A = \dfrac{\pi}{2} \vee B = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Điều này là vô lí vì trong tam giác không thể có nhiều hơn 1 góc vuông.

Vậy: $(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) > 4$.

Đề 5.5

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\cos A \cos B \cos C \le \dfrac{1}{8}$ **b)** $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$

c) $\text{cocs}A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$ **d)** $\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3}{2}$.

Giải

a) Ta có: $\cos A \cos B \cos C \le \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 4(2\cos A \cos B)\cos C \le 1$

$$\Leftrightarrow 4[\cos(A + B) + \cos(A - B)]\cos C \le 1$$

$$\Leftrightarrow 4[-\cos C + \cos(A - B)]\cos C \le 1 \quad (\text{vì } \cos(A + B) = -\cos C)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 C - 4\cos(A - B)\cos C + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow [2\cos C - \cos(A - B)]^2 + \sin^2(A - B) \ge 0$$

Bất đẳng thức này là đúng.

b) Ta có: $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 4\left(2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\right)\sin\dfrac{C}{2} \le 1$

$$\Leftrightarrow 4\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} \le 1$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} \le 1 \quad \left(\text{vì } \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} \ge 0$$

Bất đẳng thức này là đúng.

c) Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + \cos C \le \dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \left(1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right) \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 4\sin^2\frac{C}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} \geq 0$$

Bất đẳng thức này là đúng.

d) Ta có: $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$$

(với $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ và $\alpha + \beta + \gamma = \pi$)

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \left(1 - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{3}{2}$$

$\left(\text{vì } \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ nên } \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2\frac{\gamma}{2} - 4\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma-\beta}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\gamma-\beta}{2} \geq 0 .$$

Bất đẳng thức này là đúng.

Đề 5.6

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin A\sin B\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

b) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

b) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

e) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$.

Giải

a) Áp dụng câu b) của đề bài 5.2 cho $0 < A, B, C < \pi$; ta có:

$$\frac{1}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) \leq \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

Vì $\sin A > 0$, $\sin B > 0$, $\sin C > 0$ nên theo bất đẳng thức Côsi, ta lại có:

$$\frac{1}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) \geq \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

b) Đặt: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ thì: $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$

và $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{2} - \frac{A+B+C}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$

Ta có: $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma$

Theo câu a) ta có: $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Nên suy ra: $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

c) Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) \quad \left(\text{vì } \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}.2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Do đó theo kết quả câu b) ta suy ra: $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

d) Với α, β, γ như trong câu b) thì ta có:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$

Mà theo câu c) thì: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

nên suy ra: $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

e) Ta có: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A + B)\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$ (vì $\sin(A + B) = \sin C$)

$= 2\sin C[\cos(A - B) - \cos(A + B)$ (vì $\cos C = -\cos(A + B)$)

$= 2\sin C(-2)\sin A\sin(-B) = 4\sin A\sin B\sin C$

Mà theo câu a) thì: $\sin A\sin B\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Nên suy ra: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

g) Ta có: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos(A + B)\cos(A - B) + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C.\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1 \ge -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2 C - 4\cos(A - B)\cos C + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (2\cos C - \cos(A - B))^2 + \sin^2(A - B) \ge 0$. Bất đẳng thức này đúng

Vật ta đã chứng minh: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}$.

Đề 5.7

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \ge 2\sqrt{3}$ **b)** $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \ge 6$.

Giải

a) Ta có: $\sin A\sin B\sin C = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]\sin C$

$= \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos C]\sin C$

$\Rightarrow \quad \sin A\sin B\sin C \le \frac{1}{2}(1 + \cos C)\sin C$ (vì $\cos(A - B) \le 1$)

$\Rightarrow \quad (\sin A\sin B\sin C)^2 \le \frac{1}{4}(1 + \cos C)^2\sin^2 C = \frac{1}{4}(1 + \cos C)^2(1 - \cos C)$

$\Rightarrow \quad (\sin A\sin B\sin C)^2 \le \frac{1}{12}(1 + \cos C).(1 + \cos C)(1 + \cos C)(3 - 3\cos C$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$(1 + \cos C) + (1 + \cos C) + (1 + \cos C) + (3 - 3\cos C) \geq$$

$$\geq 4\sqrt[4]{(1 + \cos C)^3(3 - 3\cos C)}$$

$$\Leftrightarrow\quad 6 \geq 4\sqrt[4]{(1 + \cos C)^3(3 - 3\cos C)} \quad\Leftrightarrow\quad (1 + \cos C)^3(3 - 3\cos C) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow\quad (1 + \cos C)^3(1 - \cos C) \leq \frac{3^3}{2^4}$$

Suy ra: $(\sin A\sin B\sin C)^2 \leq \dfrac{1}{4}.\dfrac{3^3}{2^4} \quad\Leftrightarrow\quad \sin A\sin B\sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ (1)

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A}.\frac{1}{\sin B}.\frac{1}{\sin C}} = \frac{3}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}}$$

$$\geq \frac{3}{\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}} = \frac{3}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} \quad \text{(do (1))}$$

Vậy: $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$.

b) Theo câu b) của đề 5.5, ta có:

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}} \geq 8 \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\sin\dfrac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\dfrac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\dfrac{C}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}}$$

Mà: $\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}} \geq \dfrac{1}{\dfrac{1}{8}} = 8$ (do (2)

nên: $\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\dfrac{C}{2}} \geq 3\sqrt[3]{8} = 6$

Đề 5.8

Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

a) $\mathbf{tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3}}$ **b)** $\mathbf{tg^2A + tg^2B + tg^2C \geq 9}$

c) $\mathbf{tgAtgB + tgBtgC + tgCtgA \geq 9}$.

Giải

Ta có: $A + B + C = \pi \Rightarrow \operatorname{tg}(A + B) = -\operatorname{tg}C$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B}{1 - \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B} = -\operatorname{tg}C$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C \qquad (*)$$

a) Tam giác ABC nhọn nên: $\operatorname{tg}A > 0,\ \operatorname{tg}B > 0,\ \operatorname{tg}C > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C} \quad (\text{vì } (*))$$

$$\Rightarrow (\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C)^3 \geq 27(\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C)$$

$$\Rightarrow (\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C)^2 \geq 27 \quad (\text{vì } \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C > 0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C \geq 3\sqrt{3}.$$

b) Theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có:

$$\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C \leq \sqrt{3(\operatorname{tg}^2A + \operatorname{tg}^2B + \operatorname{tg}^2C}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3} \leq \sqrt{3(\operatorname{tg}^2A + \operatorname{tg}^2B + \operatorname{tg}^2C} \quad (\text{do câu a})$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2A + \operatorname{tg}^2B + \operatorname{tg}^2C \geq 9.$$

c) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}B\operatorname{tg}C + \operatorname{tg}C\operatorname{tg}A \geq 3\sqrt[3]{(\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C)^2}$$

Mà theo câu a) ta có:

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C \geq 3\sqrt{3}$$

nên: $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}B\operatorname{tg}C + \operatorname{tg}C\operatorname{tg}A \geq 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^2} = 9$

Vậy: $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}B\operatorname{tg}C + \operatorname{tg}C\operatorname{tg}A \geq 9.$

Đề 5.9

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \leq \dfrac{9}{4}$

b) $\dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B} + \dfrac{1}{\sin^2 C} \geq 4$

c) $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \leq \dfrac{9}{4}$

d) $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$

e) $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{3}{4}$

g) $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}} \geq 12$

h) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} + \sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2} \leq \dfrac{3}{4}$

i) $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} \geq 6\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

Giải

a) Ta có: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \leq \dfrac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(1 - \cos2A) + \frac{1}{2}(1 - \cos2B) + \sin^2C \leq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) + \sin^2C \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos(A + B)\cos(A - B) + \sin^2C \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C.\cos(A - B) + (1 - \cos^2C) \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2C - \cos(A - B)\cos C + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos C - \frac{1}{2}\cos(A - B)\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2(A - B) \geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng.

Vậy ta đã chứng minh: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \leq \dfrac{9}{4}$.

b) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(\sin A\sin B\sin C)^2}}$$

Mà theo câu a) của đề 5.6 ta có:

$$\sin A\sin B\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}\right)^2 \geq \left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2 = \left[\frac{2^3}{(\sqrt{3})^3}\right]^2$$

Do đó: $\dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B} + \dfrac{1}{\sin^2 C} \geq 3\sqrt[3]{\left[\dfrac{2^3}{(\sqrt{3})^3}\right]^2} = 3.\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3.\dfrac{4}{3} = 4$

Vậy: $\dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B} + \dfrac{1}{\sin^2 C} \geq 4$.

c) Theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có:

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \le \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C$$

Mà: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \le \dfrac{9}{4}$ (theo câu a)

nên ta có: $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A \le \dfrac{9}{4}$.

d) Ta có: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \ge 2\sqrt{3}\ \sin A\sin B\sin C$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin A}{\sin B\sin C} + \frac{\sin B}{\sin A\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A\sin B} \ge 2\sqrt{3}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{\sin A}{\sin B\sin C} + \frac{\sin B}{\sin A\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A\sin B} \ge 3\sqrt[3]{\frac{\sin A\sin B\sin C}{(\sin A\sin B\sin C)^2}}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{8}{3\sqrt{3}}} = 3.\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \ \left(\text{do } \sin A\sin B\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

Vậy ta đã chứng minh: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$.

e) Ta có: $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} \ge \dfrac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\cos A}{2} + \frac{1-\cos B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B) + \sin^2\frac{C}{2} \ge \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sin^2\frac{C}{2} - \frac{3}{4} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \frac{1}{4} \ge 0 \quad \left(\text{vì } \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{A-B}{2} \ge 0.$$ Điều này đúng.

Vậy ta đã chứng minh: $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} \ge \dfrac{3}{4}$.

g) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}}$$

Mà theo câu b) của đề 5.5, thì:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \ge 8$$

nên suy ra: $$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge 3\sqrt[3]{8^2} = 3.4 = 12$$

Vậy: $$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge 12.$$

h) Ta có: $$2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) =$$

$$= \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right)$$

Mà ta có: $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$ (theo câu d. của 5.5)

$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \ge \frac{3}{4}$ (câu e) của 5.5)

Nên suy ra: $$2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right) \le \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$$

Vậy: $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \le \frac{3}{4}.$$

i) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \ge 3\sqrt{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}$$

$$\ge 3.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}$$

Mà: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$ (theo câu b, đề 5.5)

nên: $$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \ge 8$$

Do đó: $$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \ge 3\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.\sqrt[3]{8}$$

Tức là: $$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \ge 6\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

Đề 5.10

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\cot g A \cot g B + \cot g B \cot g C + \cot g C \cot g A = 1$

b) $\cot g^2 A + \cot g^2 B + \cot g^2 C \geq 1$

c) $\cot g A + \cot g B + \cot g \geq \sqrt{3}$

d) $\cot g A \cot g B \cot g C \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

e) $\cot g \dfrac{A}{2} + \cot g \dfrac{B}{2} + \cot g \dfrac{C}{2} = \cot g \dfrac{A}{2} \cot g \dfrac{B}{2} \cot g \dfrac{C}{2}$

g) $\cot g \dfrac{A}{2} + \cot g \dfrac{B}{2} + \cot g \dfrac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$

h) $\cot g^2 \dfrac{A}{2} + \cot g^2 \dfrac{B}{2} + \cot g^2 \dfrac{C}{2} \geq 9$

i) $\cot g \dfrac{A}{2} \cot g \dfrac{B}{2} + \cot g \dfrac{B}{2} \cot g \dfrac{C}{2} + \cot g \dfrac{C}{2} \cot g \dfrac{A}{2} \geq 9.$

Giải

a) Ta có: $A + B + C = \pi$ nên:

$$\cot g(A + B) = -\cot g C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cot g A \cot g B - 1}{\cot g A + \cot g B} = -\cot g C$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot g A \cot g B + \cot g B \cot g C + \cot g C \cot g A = 1.$$

b) Theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có:

$$\cot g A \cot g B + \cot g B \cot g C + \cot g C \cot g A \leq \cot g^2 A + \cot g^2 B + \cot g^2 C$$

Do đó theo câu a) ta suy ra rằng: $\cot g^2 A + \cot g^2 B + \cot g^2 C \geq 1.$

c) Ta có: $(\cot g A + \cot g B + \cot g C)^2 =$

$$= \cot g^2 A + \cot g^2 B + \cot g^2 C + 2(\cot g A \cot g B + \cot g B \cot g C + \cot g C \cot g A)$$

$$= \cot g^2 A + \cot g^2 B + \cot g^2 C + 2 \quad \text{(do câu a)}$$

Do đó theo câu b) ta suy ra:

$$(\cot g A + \cot g B + \cot g C)^2 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \cot g A + \cot g B + \cot g C \geq \sqrt{3}$$

Lưu ý: Cần biết rằng: $\cot g A + \cot g B + \cot g C \geq 0$

(Đọc giả tự kiểm chứng).

d) Nếu ΔABC là tù thì $\cot g A \cot g B \cot g C < 0$ (vì có 1 góc tù)

Nếu ΔABC là vuông thì $\cot g A \cot g B \cot g C = 0$ (vì có 1 góc vuông).

Xét ΔABC là nhọn: Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt[3]{\cot g A \cot g B \cot g C} \leq \frac{1}{3}(\cot g A + \cot g B + \cot g C)$$

Nên theo câu c) ta có: $\sqrt[3]{\text{cotgAcotgBcotgC}} \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $\text{cotgAcotgBcotgC} \le \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

Kết luận: $\text{cotgAcotgBcotgC} \le \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

e) Ta có: $\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ nên

$$\text{cotg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \text{tg}\frac{C}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2} - 1}{\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2}} = \frac{1}{\text{cot g}\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}.$$

g) Ta có: $\dfrac{A}{2} \le \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{B}{2} \le \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{C}{2} \le \dfrac{\pi}{2}$

nên: $\text{cotg}\dfrac{A}{2} \ge 0$, $\text{cotg}\dfrac{B}{2} \ge 0$, $\text{cotg}\dfrac{C}{2} \ge 0$

Theo bất đẳng thức Côsin, ta có:

$$\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} \ge 3\sqrt[3]{\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}} \text{ (do câu e)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)^3 \ge 27\left(\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2 \ge 27$$

$$\Rightarrow \quad \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} \ge 3\sqrt{3}.$$

h) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\text{cotg}^2\frac{A}{2} + \text{cotg}^2\frac{B}{2} + \text{cotg}^2\frac{C}{2} \ge 3\sqrt[3]{\left(\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2}$$

Mà câu g) cho: $\text{cotg}\dfrac{A}{2} + \text{cotg}\dfrac{B}{2} + \text{cotg}\dfrac{C}{2} \ge 3\sqrt{3}$

Nếu áp dụng câu e) ta có:

$$\text{cotg}^2\frac{A}{2}+\text{cotg}^2\frac{B}{2}+\text{cotg}^2\frac{C}{2}\ge 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^2}=3\,.\,3=9$$

Vậy: $\text{cotg}^2\dfrac{A}{2}+\text{cotg}^2\dfrac{B}{2}+\text{cotg}^2\dfrac{C}{2}\ge 9.$

i) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}\text{cotg}\frac{A}{2}\ge$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\left(\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2}$$

Làm tương tự như câu h) thì ta có:

$$\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}\text{cotg}\frac{A}{2}\ge 9.$$

Đề 5.11

Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

$\text{tg}^2A\text{tg}^2B+\text{tg}^2B\text{tg}^2C+\text{tg}^2C\text{tg}^2A\ge 3\,\text{tg}^2A\text{tg}^2B\text{tg}^2C-9-5(\text{tg}^2A+\text{tg}^2B+\text{tg}^2C)$ (*)

Giải

Trong tam giác ABC, ta có: $\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C=\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C$

nên (*) được viết thành:

$$\text{tg}^2A\text{tg}^2B+\text{tg}^2B\text{tg}^2C+\text{tg}^2C\text{tg}^2A\ge$$
$$\ge 3\,(\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C)^2-9-5\,(\text{tg}^2A+\text{tg}^2B+\text{tg}^2C)$$

$$\Leftrightarrow\quad \text{tg}^2A\text{tg}^2B+\text{tg}^2B\text{tg}^2C+\text{tg}^2C\text{tg}^2A\ge$$
$$\ge 6(\text{tg}A\text{tg}B+\text{tg}B\text{tg}C+\text{tg}C\text{tg}A)-9-2(\text{tg}^2A+\text{tg}^2B+\text{tg}^2C)$$

$$\Leftrightarrow\quad (\text{tg}^2A\text{tg}^2B-6\,\text{tg}A\text{tg}B)+(\text{tg}^2B\text{tg}^2C-6\,\text{tg}B\text{tg}C)+$$
$$+(\text{tg}^2C\text{tg}^2A-6\text{tg}C\text{tg}A)+2\,[\text{tg}^2A+\text{tg}^2B+\text{tg}^2C]+9\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\quad (\text{tg}A\text{tg}B-3)^2+(\text{tg}B\text{tg}C-3)^2+(\text{tg}C\text{tg}A-3)^2+$$
$$+2\,(\text{tg}^2A+\text{tg}^2B+\text{tg}^2C-9)\ge 0 \qquad (1)$$

Vì ΔABC nhọn nên: $\text{tg}A>0,\ \text{tg}B>0,\ \text{tg}C>0.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C\ge 3\sqrt[3]{\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C}$

$\Rightarrow\quad \text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C\ge 3\sqrt[3]{\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C}$ (vì $\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C=\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C$)

$\Rightarrow\quad \text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C\ge 3\sqrt{3}$

Ta lại có: $\text{tg}^2A+\text{tg}^2B+\text{tg}^2C\ge 3\sqrt[3]{(\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C)^2}\ge 3\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^2}=9$

$\Rightarrow\quad \text{tg}^2A+\text{tg}^2B+\text{tg}^2C-9\ge 0$

Suy ra (1) đúng và do đó (*) đã được chứng minh.

Đề 5.12

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \le \frac{1}{8}$.

b) $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \le \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ **(với ΔABC nhọn).**

Giải

a) Xét: $M = (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C)$

$$= 2\sin^2\frac{A}{2}.2\sin^2\frac{B}{2}.2\sin^2\frac{C}{2} = 8\left(\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$\frac{1}{3}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) \ge \sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

Mà: $$\frac{1}{3}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) \le \sin\left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

(xem câu b) đề 5.2)

nên: $$\frac{1}{2} \ge \sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

Suy ra: $(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \le \frac{1}{8}$.

b) Ta có: $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) =$

$$= \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\right]\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\right]\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right)\right]$$

$$= (1 - \cos\alpha)(1 - \cos\beta)(1 - \cos\gamma)$$

$$\left(\text{với } \alpha = \frac{\pi}{2} - A > 0, \beta = \frac{\pi}{2} - B > 0, \gamma = \frac{\pi}{2} - C > 0, \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 8\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

Ta lại có: $$\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) \le \sin\left(\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{12}$$

Nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \le \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right) \le \sin\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 \le \left(\sin^2\frac{\pi}{12}\right)^3 = \left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

Do đó suy ra: $(1-\sin A)(1-\sin B)(1-\sin C) \le \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

Đề 5.13

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right) \ge \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Khi nào xảy ra đẳng thức.

Giải

Đặt: $$M = \left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{\sin A\sin B}+\frac{1}{\sin B\sin C}+\frac{1}{\sin C\sin A}\right)+\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}}$$

mà $$\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \le \frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$\le \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (theo câu b) đề 5.2)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}} \ge \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Suy ra: $$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C} \ge 3.\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\sin A\sin B}+\frac{1}{\sin B\sin C}+\frac{1}{\sin C\sin A}\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sin A\sin B}+\frac{1}{\sin B\sin C}+\frac{1}{\sin C\sin A}\geq 3.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \qquad (2)$$

Ta lại có: $$\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}\geq\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \qquad (3)$$

Cộng vế (1), (2) và (3) ta được:

$$M\geq 1+3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3=\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Vậy: $$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\geq\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi cả ba bất đẳng thức (1), (2), (3) đều trở thành đẳng thức nên lúc đó ta có:

$\sin A = \sin B = \sin C$ tức là: $A = B = C$ (tam giác là đều).

Đề 5.14

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2 \qquad (*)$$

Giải

Ta có: $$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\frac{A+B}{2}\right] \qquad \left(\text{vì }\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}.(-2)\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>1>0$$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C<2(\cos A+\cos B+\cos C)$

$\Leftrightarrow \sin(B+C)+\sin(A+C)+\sin(A+B)<2(\cos A+\cos B+\cos C)$

$\Leftrightarrow \sin C.(\cos B+\cos A)+\sin A.(\cos B+\cos C)+\sin B.(\cos A+\cos C)<$

$<2(\cos A+\cos B+\cos C) \qquad (**)$

Ta cần chứng minh: $\cos A+\cos B>\sin C(\cos B+\cos A)$

Ta có: $\begin{cases} \cos A + \cos B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right) \geq 0 \\ \sin C \leq 1 \end{cases}$

Suy ra: $\cos A + \cos B \geq \sin C\,(\cos A + \cos B)$ (1)

Lý luận tương tự thì có: $\cos B + \cos C \geq \sin A.\,(\cos B + \cos C)$ (2)

$\cos C + \cos A \geq \sin B.\,(\cos C + \cos A)$ (3)

Cộng vế (1), (2) và (3) ta được:

$$2(\cos A+\cos B+\cos C) \geq \sin C(\cos A + \cos B) + \sin A(\cos B + \cos C) + {} + \sin A(\cos B + \cos C)$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi cả (1), (2) và (3) đều là đẳng thức, tức là phải có $\sin A = \sin B = \sin C = 1$. Điều này không thể xảy ra trong tam giác ABC, thế nên:

$$2(\cos A + \cos B + \cos C) > \sin C(\cos A + \cos B) + \sin A(\cos B + \cos C) + {} + \sin A(\cos B + \cos C)$$

Điều này chứng tỏ (**) đúng nên suy ra (*) đã được chứng minh.

Đề 5.15

Cho tam giác nhọn ABC với $A \leq B \leq C$.

a) Chứng minh: $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \geq \dfrac{2\cos\dfrac{C}{2} + \sin C}{2\sin\dfrac{C}{2} + \cos C}$

b) Suy ra rằng: $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} > 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Giải

a) Vì $A \leq B \leq C$ nên: $\pi = A + B + C \leq 3C$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} \leq C < \frac{\pi}{2} \quad \left(\text{vì } \Delta ABC \text{ nhọn nên } C < \frac{\pi}{2}\right)$$

Ta có: $$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + \sin C}{2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + \cos C}$$

$$= \frac{2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + \sin C}{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + \cos C} \qquad (1)$$

Mặt khác ta lại có: $$\frac{2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + \sin C}{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + \cos C} \geq \frac{2\cos\dfrac{C}{2} + \sin C}{2\sin\dfrac{C}{2} + \cos C} \qquad (2)$$

Thật vậy: (2) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin C\cos\frac{A-B}{2}+2\sin C.\sin\frac{C}{2}+2\cos C.\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C\cos C$$

$$\geq\quad 2\sin C.\cos\frac{A-B}{2}+2\cos C.\cos\frac{C}{2}+2\sin C.\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C\cos C$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos C\cos\frac{C}{2}-\sin C\sin\frac{C}{2}\right)+2\left(\sin C\sin\frac{C}{2}-\cos C\cos\frac{C}{2}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{3C}{2}-2\cos\frac{3C}{2}\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad\cos\frac{3C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-1\right)\geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $\cos\frac{A-B}{2}\leq 1$ và $\frac{3C}{2}\geq\frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{3C}{2}\leq 0$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}\geq\dfrac{2\cos\frac{C}{2}+\sin C}{2\sin\frac{C}{2}+\cos C}$.

b) Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos\frac{x}{2}+\sin x}{2\sin\frac{x}{2}+\cos x}$, $\frac{\pi}{3}\leq x<\frac{\pi}{2}$

Đạo hàm:

$$f'(x)=\frac{\left(-\sin\frac{x}{2}+\cos x\right)\left(2\sin\frac{x}{2}+\cos x\right)-\left(2\cos\frac{x}{2}+\sin x\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin x\right)}{\left(2\sin\frac{x}{2}+\cos x\right)^2}$$

$$=\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos x\sin\frac{x}{2}-\cos x\sin\frac{x}{2}+\cos^2x-2\cos^2\frac{x}{2}-\sin x\cos\frac{x}{2}+\sin^2x+2\sin x\cos\frac{x}{2}}{\left(2\sin\frac{x}{2}+\cos x\right)^2}$$

$$=\frac{-1+\cos x\sin\frac{x}{2}+\sin x\cos\frac{x}{2}}{\left(2\sin\frac{x}{2}+\cos x\right)^2}=\frac{\sin\frac{3x}{2}-1}{\left(2\sin\frac{x}{2}+\cos x\right)^2}<0$$

Do đó f(x) là hàm số giảm trên $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$, suy ra:

với $\frac{\pi}{3}\leq x<\frac{\pi}{2}$ thì $f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad f(x)>\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra với $\frac{\pi}{3}\leq C<\frac{\pi}{2}$ ta có $f(C)>1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

tức là: $$\frac{2\cos\frac{C}{2}+\sin C}{2\sin\frac{C}{2}+\cos C} > 1+\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (3)$$

Dùng kết quả câu a) và (3) ta được: $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C} > 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Đề 5.16

Chứng minh rằng: $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)} > 8$ với mọi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Giải

Ta có: $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)} > 8$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\sin^2 x(1-\text{tg}x} > 8$ (chia tử và mẫu cho cosx > 0)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1+\text{tg}^2x}{\text{tg}^2x(1-\text{tg}x)} > 8 \quad \left(\text{do } \sin^2 x = \dfrac{\text{tg}^2x}{1+\text{tg}^2x}\right)$

$\Leftrightarrow \quad 1+\text{tg}^2x > 8\,\text{tg}^2x(1-\text{tg}x)$ (vì $0 < x < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \text{tg}x < 1 \Rightarrow 1-\text{tg}x > 0$)

$\Leftrightarrow \quad 8\text{tg}^3x - 7\,\text{tg}^2x + 1 > 0 \Leftrightarrow 8t^3 - 7t^2 + 1 > 0$ (với $t = \text{tg}x$, $0 < t < 1$).

Xét hàm số: $f(t) = 8t^3 - 7t^2 + 1$, $0 < t < 1$

Đạo hàm: $f'(t) = 24t^2 - 14t = 2t(12t-7)$

t	0		$\frac{7}{12}$		1
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	

Ta có: $f_{\text{Min}} = \dfrac{356}{12^3} > 0$ nên $f(t) > 0$ với $\forall t \in (0; 1)$

tức là: $8t^3 - 7t^2 + 1 > 0$, $\forall t \in (0; 1)$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh xong.

Đề 5.17

Cho tam giác ABC thỏa: $\begin{cases} \sin A + \sin B \ge 2\sin C & (1) \\ \cos A + \cos B \ge 2\cos C & (2) \end{cases}$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Giải

Trước tiên ta cần chứng minh rằng C là góc nhọn.

Thật vậy, nếu $C \ge \dfrac{\pi}{2}$ thì $0 < A + B \le \dfrac{\pi}{2}$ (vì $A + B + C = \pi$)

Ta có: $0 < A < A + B \le \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin A < \sin(A + B) = \sin C$

$0 < B < A + B \le \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin B < \sin(A + B) = \sin C$

Suy ra: $\sin A + \sin B < 2 \sin C$

Điều này trái với giả thiết (1) của đề bài. Vậy C là góc nhọn.

Bây giờ ta lại có:

$(1) \Leftrightarrow \quad (\sin A + \sin B)^2 \ge 4 \sin^2 C$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A + \sin^2 B + 2 \sin A \sin B \ge 4 \sin^2 C$

$(2) \Leftrightarrow \quad (\cos A + \cos B)^2 \ge 4 \cos^2 C$ (vì C nhọn nên $\cos C > 0$)

$\Leftrightarrow \quad \cos^2 A + \cos^2 B + 2 \cos A \cos B \ge 4 \cos^2 C$

Cộng vế hai bất đẳng thức vừa nêu, ta được:

$$1 + 1 + 2\cos(A - B) \ge 4 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(A - B) \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A - B) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

Lúc đó: $\left.\begin{array}{l}(1) \Leftrightarrow \sin A \ge \sin C \\ (2) \Leftrightarrow \cos A \ge \cos C\end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = C \quad \left(\text{vì } 0 < C < \frac{\pi}{2}, 0 < A < \frac{\pi}{2}\right)$

Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

Đề 5.18

a) Chứng minh trong mọi tam giác ABC thì: cosA + cosB + cosC > 1 (*)

b) Chứng minh số 1 là số lớn nhất trong vế phải của (*) để bất đẳng thức đúng với mọi tam giác ABC.

Giải

a) Ta có: (*) $\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2} > 0 \quad \left(\text{vì } \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) > 0 \quad \left(\text{vì } \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{C}{2}.(-2)\sin\frac{A}{2}.\sin\left(-\frac{B}{2}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} > 0$$

Bất đẳng thức này đúng vì $\sin\frac{A}{2} > 0$, $\sin\frac{B}{2} > 0, \sin\frac{C}{2} > 0$.

b) Giả sử có số $\alpha > 1$ ($\alpha = 1 + a$ với $a > 0$) sao cho (*) luôn thỏa mãn, tức là: $\cos A + \cos B + \cos C > \alpha = 1 + a$

$\Rightarrow \quad \cos A + \cos B + \cos C - 1 > a$

$$\Rightarrow \quad 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \ge a$$ (theo chứng minh của câu a)

Bất đẳng thức này sẽ không đúng khi ta xét tam giác ABC có góc A đủ nhỏ để $\sin\frac{A}{2} < \frac{a}{4}$ thì $4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} < a$

Vậy, không thể thay thế số 1 bởi số lớn hơn trong bất đẳng thức (*); điều đó có nghĩa là số 1 là số lớn nhất thỏa (*).

Đề 5.19

Chứng minh với ΔABC bất kì ta luôn có: $\sin^2A + \sin^2B > \frac{1}{2}\sin^2C$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 > \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2R}\right)^2$ (định lí sin góc đối)

$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2 \Leftrightarrow 2m^2 + \frac{c^2}{2} > \frac{1}{2}c^2$ (hệ thức trung tuyến)

$\Leftrightarrow \quad m^2 > 0$ (m là độ dài trung tuyến kẻ từ C)

Bất đẳng thức này luôn đúng.

Vậy ta đã chứng minh: $\sin^2A + \sin^2B > \frac{1}{2}\sin^2C$.

Đề 5.20

Cho m là số nguyên dương và số thực $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng: $|\sin nx| \le n|\sin x|$ (*)

Giải

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Với n = 1: bất đẳng thức (*) trở thành: $|\sin x| \le |\sin x|$ là đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng cho tới số tự nhiên k, nghĩa là:

$$|\sin kx| \le k|\sin x| \qquad (1)$$

Ta có:
$$\begin{aligned}|\sin(k+1)x| &= |\sin kx.\cos x + \sin x.\cos kx|\\ &\le |\sin kx.\cos x| + |\sin x.\cos kx|\\ &\le |\sin kx|.|\cos x| + |\sin x|.|\cos kx|\\ &\le |\sin kx| + |\sin x| \quad (\text{vì } |\cos x| \le 1, |\cos kx| \le 1)\\ &\le k|\sin x| + |\sin x| \le (k+1)|\sin x|\end{aligned}$$

Do đó: $|\sin(k+1)x| \le (k+1)|\sin x|$

Vậy theo phương pháp quy nạp ta có:

$$|\sin nx| \le n|\sin x| \text{ với } \forall n > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đề 5.21

Cho ΔABC. Chứng minh rằng: $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \ge 3^{1-\sqrt{2}}$.

Giải

Xét hàm số: $f(x) = (\mathrm{tg}x)^{2\sqrt{2}}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Đạo hàm: $f'(x) = 2\sqrt{2}(1 + \mathrm{tg}^2x).(\mathrm{tg}x)^{2\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2}\left[(\mathrm{tg}x)^{2\sqrt{2}-1} + (\mathrm{tg}x)^{2\sqrt{2}+1}\right]$

$$f''(x) = 2\sqrt{2}\left[(2\sqrt{2}-1)(1+\mathrm{tg}^2x)(\mathrm{tg}x)^{2\sqrt{2}-2} + (2\sqrt{2}+1)(1+\mathrm{tg}^2x)(\mathrm{tg}x)^{2\sqrt{2}}\right] > 0$$

(vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $\mathrm{tg}x > 0$, $2\sqrt{2} - 1 > 0$)

Vì $f''(x) > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên $y = f(x)$ có đồ thị là lõm,

do đó với: $0 < x_1, x_2 < \frac{\pi}{2}$, ta có: $\frac{1}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ (1)

Xét $0 < x_1, x_2, x_3 < \frac{\pi}{2}$, thì ta có: $0 < \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} < \frac{\pi}{2}$

nên theo (1), ta được:

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + 2f\left(\frac{x_3 + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}}{2}\right)$$

$$\geq 2\left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2 + 4x_3}{6}\right)\right] \geq 4f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2 + 4x_3}{6}}{2}\right)$$

$$\geq 4f\left(\frac{4(x_1 + x_2) + 4x_3}{12}\right) \geq 4f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$$

Suy ra: $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geq 3f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$

Áp dụng với $x_1 = \frac{A}{2}$, $x_2 = \frac{B}{2}$, $x_3 = \frac{C}{2}$ ta có:

$$\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\mathrm{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\mathrm{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3\left(\mathrm{tg}\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right)^{2\sqrt{2}} = 3\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\right)^{2\sqrt{2}}$$

$$\geq 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{2}} = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} = \frac{3}{3^{\sqrt{2}}} = 3^{1-\sqrt{2}}$$

Vậy: $\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\mathrm{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\mathrm{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}$.

Chương VI

• GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC
• GIẢI TAM GIÁC
• HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

A. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Đề 6.1

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \cos 2x + \cos x$ **b)** $y = \sin 3x + 2\sin x$

c) $y = \cos 2x + 3\sin x$ **d)** $y = |\sin x| + |\cos x|$

e) $y = a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x$ **(a, b, c là các hằng số).**

Giải

a) $y = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2t^2 + t - 1$ (với $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$)

Xét hàm số: $y = 2t^2 + t - 1$, $-1 \le t \le 1$

Đạo hàm: $y' = 4t + 1$, $y' = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{4}$

t	-1		$-\frac{1}{4}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	2

Vậy: $y_{Max} = 2$, $y_{min} = -\dfrac{9}{8}$.

b) $y = \sin 3x + 2\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x = -4\sin^3 x + 5\sin x$

$\Leftrightarrow$ $y = -4t^3 + 5t$ (với $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$)

$y' = -12t^2 + 5$, $y' = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{\dfrac{5}{12}}$

t	-1		$-\sqrt{\frac{5}{12}}$		$\sqrt{\frac{5}{12}}$		1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	-1	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	1

$$y_{Min} = -4\left(-\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^3 + 5\left(-\sqrt{\frac{5}{12}}\right) = -\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}$$

$$y_{Max} = -4\left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^3 + 5\sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{12}}.$$

c) $y = \cos 2x + 3\sin x = 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x$

$y = -2t^2 + 3t + 1$ (với $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$)

Đạo hàm: $y' = -4t + 3$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$

t	-1		$\frac{3}{4}$		1
y'		+	0	-	
y	-4	↗	$\frac{17}{8}$	↘	2

Vậy: $y_{Max} = \frac{17}{8}$, $y_{min} = -4$.

d) Ta có: $y^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2|\sin x \cos x| = 1 + |\sin 2x|$

Vì $0 < |\sin 2x| \le 1$ nên suy ra: $1 \le y^2 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le y \le \sqrt{2}$ (vì $y \ge 0$)

Vậy: $y_{min} = 1$, $y_{Max} = \sqrt{2}$.

e) $y = a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = \frac{a}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{b}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{c}{2}\sin 2x$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)\cos 2x + \frac{c}{2}\sin 2x + \frac{a+b}{2}$$

Theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có:

$$\left|\left(\frac{b-a}{2}\right)\cos 2x + \frac{c}{2}\sin 2x\right| \le \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 + c^2} \le \left(\frac{b-a}{2}\right)\cos 2x + \frac{c}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 + c^2} \le y \le \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 + c^2}$$

Vậy: $y_{min} = \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 + c^2}$, $\quad y_{Max} = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 + c^2}$.

Đề 6.2

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

a) $y = \cos x + \frac{1}{\cos x}$ $\quad \left(\text{với } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ $\quad$ (với $0 < x < \pi$)

c) $y = \sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} - \sin x - \dfrac{1}{\sin x}$ (với $0 < x < \pi$)

d) $y = \sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} + \sin x - \dfrac{1}{\sin x}$ (với $0 < x < \pi$)

e) $y = \dfrac{1}{\cos^4 x} - tg^4 x$ $\left(\text{với } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

g) $y = \dfrac{3}{\sin^2 x} - 2cotg^4 x$ (với $0 < x < \pi$).

Giải

a) Ta có: $y = t + \dfrac{1}{t}$ (với $t = \cos x$, $0 < t \le 1$)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $t + \dfrac{1}{t} \ge 2\sqrt{t.\dfrac{1}{t}} = 2 \Leftrightarrow y \ge 2$

$y = 2$ khi $t = \dfrac{1}{t} = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ Vậy: $y_{min} = 2$.

b) Đặt: $t = \sin x$ thì $0 < t \le 1$ khi $0 < x < \pi$

Vẫn theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $y = t + \dfrac{1}{t} \ge 2$

$y = 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{t} = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ Vậy: $y_{min} = 2$.

c) $y = \sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} - \left(\sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right) = \left(\sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right)^2 - 2 - \left(\sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right)$

$= t^2 - t - 2$ (với $t = \sin x + \dfrac{1}{\sin x} \ge 2$, theo câu b)

Xét hàm số: $y = t^2 - t - 2$, $t \ge 2$

Đạo hàm: $y' = 2t - 1 > 0$, $\forall t \ge 2$

t	2	∞
y'	+	
y	0	$\nearrow$

Vậy: $y_{min} = 0$.

d) $y = \sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} + \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \left(\sin x - \dfrac{1}{\sin x}\right)^2 + 2 + \left(\sin x - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

$= t^2 + 2 + t$ (với $t = \sin x - \dfrac{1}{\sin x}$)

Với $0 < x < \pi \Rightarrow 0 < \sin x \le 1 \Rightarrow 1 \le \dfrac{1}{\sin x} < \infty$

$\Rightarrow -\infty < t = \sin x - \dfrac{1}{\sin x} \le 0$

Ta có: $y = t^2 + t + 2$ với $t \in (-\infty, 0)$

$$= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$$

$y = \frac{7}{4} \Leftrightarrow t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \in (-\infty, 0)$ Vậy: $y_{min} = \frac{7}{4}$.

e) $y = \frac{1}{\cos^4 x} - tg^4x = (1 + tg^2x)^2 - tg^4x \Leftrightarrow y = 2tg^2x + 1 \geq 1$

Ta có: $y = 1$ khi $tgx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ Vậy: $y_{min} = 1$.

g) $y = \frac{3}{\sin^4 x} - 2cotg^4x = 3(1 + cotg^2x)^2 - 2cotg^4x$

$\Leftrightarrow y = cotg^4x + 6\,cotg^2x + 3 \Leftrightarrow y = t^2 + 6t + 3$ (với $t = cotg^2x$, $t \geq 0$)

Đạo hàm: $y' = 2t + 6 > 0$, $\forall t \geq 0$ nên y là hàm số tăng, suy ra:

$$y_{min} = y\,(t = 0) = 3.$$

Đề 6.3

Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$ **b)** $y = \sqrt{1 + 2\sin x} + \sqrt{1 + 2\cos x}$.

Giải

a) Miền xác định: $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Ta có: $y^2 = \cos x + \sin x + 2\sqrt{\sin x \cos x}$

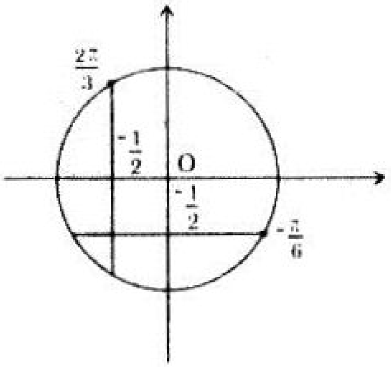
Đặt: $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

với: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

$$\Rightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

Ta lại có: $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$

nên: $y^2 = t + 2\sqrt{\frac{1}{2}(t^2 - 1)} = t + \sqrt{2(t^2 - 1)}$



Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{2(t^2 - 1)}$, $1 \leq t \leq \sqrt{2}$

Đạo hàm:

$$f'(t) = 1 + \frac{2t}{\sqrt{2(t^2 - 1)}} > 0,\ 1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ f tăng trên $[1, \sqrt{2}] \Rightarrow f_{min} = f(1) = 1$

Suy ra: $y_{min} = 1$.

b) Miền xác định: $\begin{cases} \sin x \geq -\dfrac{1}{2} \\ \cos x \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad k2\pi - \dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$

Ta có: $y^2 = 1 + 2\sin x + 1 + 2\cos x + 2\sqrt{(1 + 2\sin x)(1 + 2\cos x)}$

$= 2 + 2(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{1 + 2(\sin x + \cos x) + 4\sin x\cos x}$

Đặt: $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

thì: $y^2 = 2 + 2t + 2\sqrt{1 + 2t + 2(t^2 - 1)} = 2\left[1 + t + \sqrt{2t^2 + 2t - 1}\right]$

Xét hàm số: $f(t) = 1 + t + \sqrt{2t^2 + 2t - 1}$

Đạo hàm: $f'(t) = 1 + \dfrac{2t + 1}{\sqrt{2t^2 + 2t - 1}}$

Ta có: $f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2t^2 + 2t - 1} = -(2t + 1)$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2t^2 + 2t - 1 = 4t^2 + 4t + 1 \\ 2t + 1 \leq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2t^2 + 2t + 2 = 0 \text{ (vônghiệm)} \\ t \leq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Hơn nữa: $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$ nên ta có: $f'(t) > 0,\ \forall t$. Suy ra $f(t)$ tăng.

Vì: $-\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\pi}{12} \leq x + \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{11\pi}{12}$

$\Rightarrow \quad \sin\dfrac{\pi}{12} \leq \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \leq \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq 1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\sqrt{2(2 - \sqrt{3})} \leq t \leq \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \leq t \leq \sqrt{2}$

t	$\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$		$\sqrt{2}$
f'(t)		+	
f(t)	min	$\nearrow$	

Vậy $\quad f_{min} = f\left[\dfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)\right] = 1 + \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$

(vì $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$ **là nghiệm của** $2t^2 + 2t - 1 = 0$)

$\Leftrightarrow \quad f_{min} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$ do đó: $y_{min} = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

Đề 6.4

a) **Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của** $y = \dfrac{3\cos x + 2\sin x + 1}{\cos x - 2\sin x + 3}$

b) **Tìm k để** $y = \dfrac{k\cos x + 1}{\cos x + \sin x + 2}$ **có giá trị nhỏ nhất và lớn nhất.**

c) **Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của:** $y = \cos\dfrac{2x}{1+x^2} + \cos\dfrac{4x}{1+x^2} + 1$.

Giải

a) $y = \dfrac{3\cos x + 2\sin x + 1}{\cos x - \sin x + 3}$ có miền xác định là $\mathbb{R}$

Hàm số cho ta: $y\cos x - y\sin x + 3y = 3\cos x + 2\sin x + 1$

$\Leftrightarrow \quad (y-3)\cos x - (y+2)\sin x = 1 - 3y$

Phương trình có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi:

$$(y-3)^2 + (y+2)^2 \geq (1-3y)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - 6y + 9 + y^2 + 4y + 4 \geq 1 - 6y + 9y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 7y^2 - 4y - 13 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{7}(2-\sqrt{95}) \leq y \leq \frac{1}{7}(2+\sqrt{95})$$

Vậy: $y_{\min} = \dfrac{1}{7}(2-\sqrt{95})$, $y_{\text{Max}} = \dfrac{1}{7}(2+\sqrt{95})$.

b) $y = \dfrac{k\cos x + 1}{\cos x + \sin x + 2}$ có miền xác định là $\mathbb{R}$

Hàm số cho ta: $y\cos x + y\sin x + 2y = k\cos x + 1$

$\Leftrightarrow \quad (y-k)\cos x + y\sin x = 1 - 2y$

Phương trình có nghiệm khi: $(y-k)^2 + y^2 \geq (1-2y)^2$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - 2ky + k^2 + y^2 \geq 1 - 4y + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3y^2 - 2(2+k)y + 1 - k^2 \leq 0 \quad (\Delta' = (2k+1)^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\left[2 + k - |2k+1|\right] \leq y \leq \frac{1}{3}\left[2 + k + |2k+1|\right]$$

Do đó: $y_{\min} = \dfrac{1}{3}\left[2 + k - |2k+1|\right]$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}\left[2 + k - |2k+1|\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{3}(-k+1) & \text{nếu } k \geq -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3}(3k+3) & \text{nếu } k \leq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Đạo hàm: $f'(k) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3} & \text{nếu } k > -\dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{nếu } k \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

k	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		∞
f'(k)		+	|	−	
f(k)	$-\infty$	↗	Max	↘	$-\infty$

Suy ra: y_{min} lớn nhất khi $k = -\frac{1}{2}$.

c) Đặt: $u = \frac{2x}{1 + x^2}$ thì ta có: $-1 \le u \le 1$

(vì $1 + x^2 \ge 2\sqrt{x^2} = 2|x| \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{1 + x^2}\right| \le 1 \Leftrightarrow |u| \le 1$)

Ta có: $y = \cos u + \cos 2u + 1 = \cos u + 2\cos^2 u$

nên: $y = 2t^2 + t$ (với $t = \cos u$, $-1 \le u \le 1$ nên $\cos 1 \le t \le 1$)

Đạo hàm: $y' = 4t + 1 > 0$, khi $\cos 1 \le t \le 1$ (vì $\cos 1 > 0$)

t	cos1		1
y'		+	
y	$2\cos^2 1 + \cos 1$	↗	3

Vậy: $y_{Min} = 2\cos^2 1 + \cos 1$, $y_{Max} = 3$.

Đề 6.5

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = (\cos x + \sin x)^3 + \frac{1}{\sin^4 2x}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $y = \sin x + 3\sin 2x$.

Giải

a) Xét: $y_1 = (\cos x + \sin x)^3 = \left[\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^3$ thì: $(y_1)_{Min}$ khi

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

Xét: $y_2 = \frac{1}{\sin^4 2x}$ thì: $(y_2)_{Min}$ khi

$$\sin^4 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$$

($x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ có chứa biểu diễn $x = -\frac{3\pi}{4}$)

Ta có: Khi $x = -\frac{3\pi}{4}$ thì $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

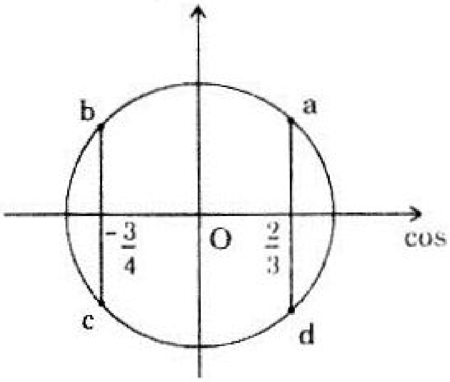
$$\Rightarrow (y_1)_{Min} = (-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2}$$

Khi $x = -\dfrac{3\pi}{4}$ thì $\sin^4 2x = \sin^4\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow (y_2)_{Min} = 1$

Do đó: Khi $x = -\dfrac{3\pi}{4}$ thì y đạt giá trị nhỏ nhất là:

$$y_{Min} = (y_1)_{Min} + (y_2)_{Min} = 1 - 2\sqrt{2}.$$

b) $y = \sin x + 3\sin 2x$ có chu kì $T = 2\pi$ nên ta chỉ cần xét với $0 \le x \le 2\pi$



Đạo hàm:

$y' = \cos x + 6\cos 2x = 6(2\cos^2 x - 1) + \cos x$

$= 12\cos^2 x + \cos x - 6$

$y' = 0 \Leftrightarrow 12\cos^2 x + \cos x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{3}{4}, \quad \cos x = \dfrac{2}{3}$

Gọi a, b, c, d là các nghiệm của y' = 0 thỏa:

$$0 < a < \frac{\pi}{2} < b < \pi < c < \frac{3\pi}{2} < d < 2\pi \text{ và}$$

$$\cos a = \cos d = \frac{2}{3}\left(\sin a = \frac{\sqrt{5}}{3}, \sin d = -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$\cos b = \cos c = -\frac{3}{4}\left(\sin b = \frac{\sqrt{7}}{4}, \sin c = -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

$$y'(0) = 12 + 1 - 6 > 0$$

Ta có:

x	0		a		b		c		d		2π
y'		+	0	–	0	+	0	–	0	+	
y	0	↗	CĐ	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	0

$y = \sin x + 3\sin 2x = \sin x(1 + 6\cos x)$

$y(a) = \sin a(1 + 6\cos a) = \dfrac{\sqrt{5}}{3}(1 + 4) = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

$y(c) = \sin c(1 + 6\cos c) = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}\left(1 - \dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{7\sqrt{7}}{8}$

Vì: $\dfrac{7\sqrt{7}}{8} < \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$ nên suy ra: $y_{Max} = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$.

B. GIẢI TAM GIÁC

Đề 6.6

Cho tam giác ABC thỏa: $A = 2B$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Tính a, c theo b, B.

Giải

Ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ (định lý sin góc đôi)

nên: $a = \dfrac{b\sin A}{\sin B} = \dfrac{b\sin 2B}{\sin B} = 2b\cos B$ (vì $A = 2B$, $\sin 2B = 2\sin B\cos B$)

Vậy: $a = 2b\cos B$.

Ta có: $c = \dfrac{b\sin C}{\sin B} = \dfrac{b\sin(\pi - 3B)}{\sin B}$ (vì $c = \pi - (A + B) = \pi - 3B$)

$$= \frac{b\sin 3B}{\sin B} = \frac{b(3\sin B - 4\sin^3 B)}{\sin B} = b(3 - 4\sin^2 B)$$

Vậy: $c = b(3 - 4\sin^2 B)$.

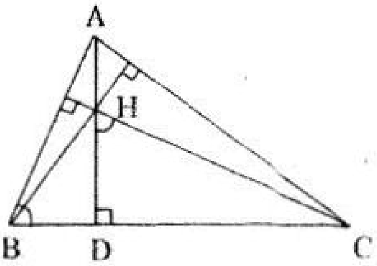
Đề 6.7

Cho tam giác ABC có đường cao AD và trực tâm H là trung điểm của AD.

a) Chứng minh: $\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C = 2$.

b) Cho biết A. Hãy tìm B và C. Biện luận.

Giải



a) Ta có: $\widehat{DHC} = \hat{B}$ (góc có cạnh vuông góc)

Tam giác vuông DHC cho ta:

$$\mathrm{tg}\widehat{DHC} = \frac{DC}{DH} \Rightarrow \mathrm{tg}B = \frac{DC}{DH}$$

Tam giác vuông DAC cho ta: $\mathrm{tg}C = \dfrac{AD}{DC}$

Suy ra: $\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C = \dfrac{DC}{DH}.\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AD}{DH} = 2$ (vì $HA = HD$)

Vậy: $\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C = 2$.

b) Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} B + C = \pi - A & (1) \\ \mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C = 2 & (2) \end{cases}$ (với B, C là ẩn số)

(1) cho ta: $\mathrm{tg}(B + C) = -\mathrm{tg}A \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C}{1 - \mathrm{tg}B\mathrm{tg}C} = -\mathrm{tg}A$

$\Leftrightarrow \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A$ (do (2))

Ta có: $\begin{cases} \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A \\ \mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C = 2 \end{cases}$

nên tgB, tgC là nghiệm của phương trình bậc hai: $X^2 - X\,\mathrm{tg}A + 2 = 0$ (*)

Xét: $\Delta = tg^2A - 8$

$$\Delta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad tg^2A - 8 \quad \Leftrightarrow \quad tgA \leq -\sqrt{2} \ \vee \ tgA \geq 2\sqrt{2}$$

- *Biện luận:*

+ Nếu $tgA < 0$: thì $tgB + tgC = tgA < 0 \quad \Rightarrow \quad tgB < 0$ hay $tgC < 0$ lúc đó ΔABC có tới 2 góc tù (vô lí): không tìm được B, C.

+ Nếu $0 \leq tgA < 2\sqrt{2}$: thì $\Delta < 0$ nên (*) vô nghiệm

Nếu $tgA \geq 2\sqrt{2}$: (*) cho $X_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(tgA \pm \sqrt{tg^2A - 8}\right)$

nên $(tgB = X_1, tgC = X_2) \vee (tgB = X_2, tgC = X_1)$.

Đề 6.8

Cho tam giác ABC có BC = 6cm, AB + AC = 10cm.

a) Chứng minh rằng: $3(\sin B + \sin C) = 5\sin(B + C)$

b) Suy ra rằng: $4tg\dfrac{B}{2}.tg\dfrac{C}{2} = 1$.

Giải

a) Ta có: $a = BC = 6, \quad c + b = AB + AC = 10$

Theo định lý sin góc đối, ta có: $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin A}{6} = \frac{\sin B + \sin C}{b + c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin A}{6} = \frac{\sin B + \sin C}{10}$$

$$\Rightarrow \quad 5\sin A = 3(\sin B + \sin C)$$

Suy ra: $5\sin(B + C) = 3(\sin B + \sin C)$ (vì $\sin A = \sin(B + C)$).

b) Từ kết quả câu a, ta suy ra:

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin(B + C)} = \frac{5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\sin\left(\frac{B + C}{2}\right)\cos\left(\frac{B - C}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{B + C}{2}\right)\cos\left(\frac{B + C}{2}\right)} = \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cos\left(\frac{B - C}{2}\right) = 5\cos\left(\frac{B + C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) = 5\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} = 1.$$

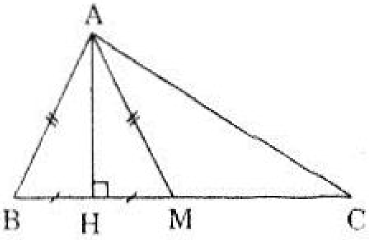
Đề 6.9

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM thỏa AM = AB.

a) Chứng minh rằng: $\operatorname{tg}B = 3\operatorname{tg}C$ và $\sin A = 2\sin(B - C)$

b) Cho biết A. Hãy tính B và C.

Giải



a) Kẻ đường cao AH, ta có: AM = AB

nên $BH = HM = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{1}{4}BC$

Tam giác vuông AHB cho ta: $\operatorname{tg}B = \dfrac{AH}{BH}$

Tam giác vuông AHC cho ta: $\operatorname{tg}C = \dfrac{AH}{HC}$

Do đó: $\dfrac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}C} = \dfrac{AH}{BH}.\dfrac{HC}{AH} = \dfrac{HC}{BH} = 3$ (vì $BH = \dfrac{1}{4}BC$)

Vậy: $\operatorname{tg}B = 3\operatorname{tg}C$

Tam giác AMC cho ta: $\dfrac{AC}{\sin\widehat{AMC}} = \dfrac{MC}{\sin\widehat{MAC}}$ (1)

Ta lại có: $\widehat{AMC} = \pi - \widehat{AMB} = \pi - \widehat{ABM} = \pi - B$ (vì ΔBAM cân tại A)

$\Rightarrow \quad \sin\widehat{AMC} = \sin B$

Mặt khác, $\widehat{AMB}$ là góc ngoài của tam giác AMC nên:

$$\widehat{AMB} = \widehat{MAC} + C \quad \Rightarrow \quad \widehat{MAC} = \widehat{AMB} - C = B - C$$

và (1) trở thành: $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{MC}{\sin(B - C)}$

Trong tam giác ABC thì: $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{BC}{\sin A}$

Suy ra: $\dfrac{MC}{\sin(B - C)} = \dfrac{BC}{\sin A} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin A}{\sin(B - C)} = \dfrac{BC}{MC} = 2$

Vậy: $\sin A = 2\sin(B - C)$.

b) Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} B + C = \pi - a & \text{(i)} \\ \operatorname{tg}B = 3\operatorname{tg}C & \text{(ii)} \end{cases}$

Từ (i), ta có: $\operatorname{tg}(B + C) = -\operatorname{tg}A \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C}{1 - \operatorname{tg}B\operatorname{tg}C} = -\operatorname{tg}A$

$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = -\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$

$\Rightarrow \quad 4\operatorname{tg}C = -\operatorname{tg}A + 3\operatorname{tg}A\operatorname{tg}^2C$ (do (ii))

$\Rightarrow \quad 3\operatorname{tg}A.\operatorname{tg}^2C - 4\operatorname{tg}C - \operatorname{tg}A = 0$

$\Rightarrow \quad 3t^2\operatorname{tg}A - 4t - \operatorname{tg}A = 0$ (với $t = \operatorname{tg}C$)

$$\Delta' = 4 + 3tg^2A > 0$$

$$P = t_1t_2 = -\frac{1}{3} < 0 \text{ nên phải có } t_1 < 0 < t_2$$

Với $t = t_1 < 0$ thì $tgC < 0$, $tgB < 0$. Điều này vô lý vì trong một tam giác không thể có tới 2 góc tù.

Với $t = t_2 > 0$ thì:

$$tgC = \frac{1}{3tgA}\left(2 + \sqrt{4 + 3tg^2A}\right);\ tgB = \frac{1}{tgA}\left(2 + \sqrt{4 + 3tg^2A}\right).$$

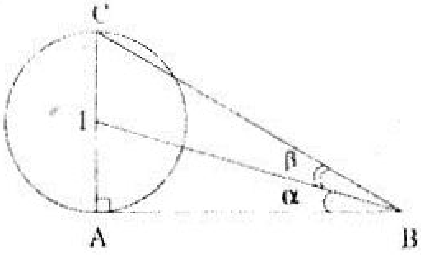
Đề 6.10

Cho đoạn thẳng cố định AB = a. Đường tròn di động tâm I tiếp xúc với AB tại điểm A và có đường kính là AC. Đặt $\alpha = \widehat{ABI}, \beta = \widehat{IBC}$.

a) Lập hệ thức giữa tgα và tgβ. **b) Tìm α để tgβ là lớn nhất.**

Giải

a) Tam giác vuông BAC cho ta: $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{AC}{AB}$



Tam giác vuông BAI cho ta: $tg\alpha = \dfrac{AI}{AB}$

Mà AC = 2AI nên suy ra:

$$tg(\alpha + \beta) = 2tg\alpha \Rightarrow \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = 2tg\alpha$$

$$\Leftrightarrow tg\alpha + tg\beta = 2tg\alpha(1 - tg\alpha tg\beta). \quad (*)$$

b) Hệ thức (*) được viết thành:

$$tg\beta(1 + 2tg^2\alpha) = tg\alpha \Leftrightarrow tg\beta = \frac{tg\alpha}{2tg^2\alpha + 1}$$

Ta có: $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên $tg\alpha > 0$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $2tg^2\alpha + 1 \geq 2\sqrt{2tg^2\alpha} = 2\sqrt{2}\,tg\alpha$

$$\Leftrightarrow \frac{tg\alpha}{2tg^2\alpha + 1} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow tg\beta \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Do đó: $tg\beta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow$ $2tg^2\alpha = 1$ (bất đẳng thức Côsi trở thành đẳng thức)

$\Leftrightarrow$ $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy ta được: tgβ lớn nhất khi $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

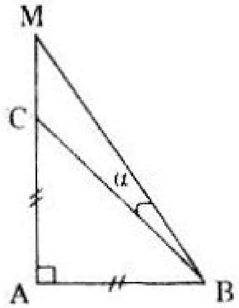
Đề 6.11

Cho tam giác vuông cân ABC với AB = AC = a. Kéo dài cạnh AC một đoạn CM với $\widehat{CBM} = \alpha$.

a) Tính AM, CM theo a và α.

b) Tính $\operatorname{tg}\alpha$ để CM = BC. Suy ra cách tính $\cos\frac{\pi}{8}$ và $\sin\frac{\pi}{8}$.

Giải



a) Ta có: $\widehat{ABM} = \widehat{ABC} + \widehat{CBM} = \frac{\pi}{4} + \alpha$

Trong tam giác vuông ABM thì:

$$AM = AB\operatorname{tg}\widehat{ABM} = a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

Ta lại có: $CM = AM - AC = a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - a = a\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 1\right]$

$$= a\left(\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - 1\right) = \frac{2a\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}.$$

b) Tam giác vuông cân BAC cho ta: $BC = a\sqrt{2}$

Để CM = BC thì: $\frac{2a\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = a\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha = 1 - \operatorname{tg}\alpha$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)\operatorname{tg}\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$$

Vậy CM = BC khi $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} - 1$

Với CM = BC thì tam giác BCM cân tại C nên ta có:

$\widehat{ACB} = 2\alpha$ (góc ngoài của ΔBCM)

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8};\ \text{do đó ta có:}\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

Suy ra: $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{8}$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

Do đó: $\sin\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}.\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1).\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2} + 1}\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Đề 6.12

Cho tam giác ABC có độ dài cạnh là b, a, c theo thứ tự tạo thành một cấp số cộng (BC = a, AC = b, AB = c).

a) Chứng minh rằng: $3\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 1$.

b) Cho biết góc A. Hãy tìm các góc B và C.

Giải

a) Ta có: (b, a, c) là cấp số cộng thì: $b + c = 2a$

$$\Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A \quad \left(\text{vì } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2.2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B+C}{2} \quad \left(\text{vì } \frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{B+C}{2} \quad \left(\text{vì } \sin\frac{B+C}{2} \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 1.$$

b) Ta có: $\frac{B+C}{2} + \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2}$ nên: $\text{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right) = \text{cotg}\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}}{1 - \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}} = \text{cotg}\frac{A}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\text{cotg}\frac{A}{2} \ \text{(do câu a)}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{2}{3}t \quad \left(\text{đặt } t = \text{cotg}\frac{A}{2} \text{ là đã biết}\right)$$

Với: $\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{2}{3}t$ và $\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ thì $\text{tg}\frac{B}{2}, \text{tg}\frac{C}{2}$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - \frac{2}{3}tX + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3X^2 - 2tX + 1 = 0$ (*)

Ta có: $\Delta' = t^2 - 3$; $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq 3 \Leftrightarrow t \geq \sqrt{3}$ (vì $t = \text{cotg}\frac{A}{2} > 0$).

- *Biện luận:*

– Nếu $t < \sqrt{3}$: $\Delta' < 0$ nên bài toán là vô nghiệm.

– Nếu $t = \sqrt{3}$: thì $X_1 = X_2 = \frac{t}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \text{tg}\frac{B}{2} = \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow B = C = \frac{\pi}{3}$

– Nếu $t > \sqrt{3}$: $\Delta' > 0$, $P = \dfrac{1}{3} > 0$, $S = \dfrac{2}{3}t > 0$ nên (*) có 2 nghiệm thỏa:

$0 < X_1 < X_2$, do đó:

$$\text{tg}\frac{B}{2} = X_1 = \frac{1}{3}\left(t - \sqrt{t^2 - 3}\right), \quad \text{tg}\frac{C}{2} = X_2 = \frac{1}{3}\left(t + \sqrt{t^2 - 3}\right).$$

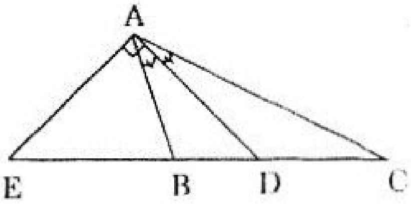
Đề 6.13

Cho tam giác ABC với a = BC, b = AC, c = AB, b > c. Gọi AD, AE lần lượt là phân giác trong và ngoài của góc A.

a) Tính AD, AE theo b, c và A.

b) Cho biết AD = AE . Chứng minh rằng: $B = C + \dfrac{\pi}{2}$.

Giải



a) Đặt AD = x và AE = y

Tam giác ABC có diện tích là: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$

Tam giác BAD có diện tích là: $S_1 = \dfrac{1}{2}cx\sin\dfrac{A}{2}$

Tam giác CAD có diện tích là: $S_2 = \dfrac{1}{2}bx\sin\dfrac{A}{2}$

Ta có: $S = S_1 + S_2 \quad\Leftrightarrow\quad bc\sin A = cx\sin\dfrac{A}{2} + bx\sin\dfrac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad bc\sin A = x(b + c)\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2bc\cos\frac{A}{2} = x(b + c) \quad \left(\text{vì } \sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2bc}{b + c}.\cos\frac{A}{2}. \quad \text{Vậy: } AD = \frac{2bc}{b + c}.\cos\frac{A}{2}$$

Tam giác AEC có diện tích là:

$$S_3 = \frac{1}{2}AE.AC.\sin\widehat{EAC} = \frac{1}{2}yb\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}yb\cos\frac{A}{2}$$

Tam giác AEB có diện tích là:

$$S_4 = \frac{1}{2}AE.AB\sin\widehat{BAE} = \frac{1}{2}yc\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}yc\cos\frac{A}{2}$$

Ta có: $S = S_3 - S_4 \quad\Leftrightarrow\quad bc\sin A = y(b - c)\cos\dfrac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2bc\sin\frac{A}{2} = y(b - c) \quad\Leftrightarrow\quad y = \frac{2bc}{b - c}\sin\frac{A}{2}$$

Vậy: $AE = \dfrac{2bc}{b-c}\sin\dfrac{A}{2}$.

b) Với AD = AE thì ta có:

$$\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{b+c}{b-c}\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B - \sin C}.\sin\frac{A}{2} \quad (\text{vì } b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}.\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right).\operatorname{cotg}\left(\frac{B-C}{2}\right).\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}.\operatorname{cotg}\left(\frac{B-C}{2}\right).\sin\frac{A}{2} \quad \left(\text{vì } \frac{B+C}{2} + \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cotg}\frac{B-C}{2} = 1 \quad \left(\text{vì } \operatorname{cotg}\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{B-C}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow B - C = \frac{\pi}{2} \quad \text{Vậy ta được: } B = C + \frac{\pi}{2}.$$

Đề 6.14

Cho phương trình: $x^2 - 2x\cos t + (2-\sqrt{3})(1 - 4\sin^2 t) = 0$ (*) với tham số $t \in [0, 2\pi]$.

a) Biện luận dấu của nghiệm số theo t.

b) Cho tam giác AOB có $\widehat{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$, $OA = x_1$, $OB = x_2$ (trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của (*)). Tính AB và bán kính đường tròn ngoại tiếp của ΔAOB.

Giải

a) Ta có: $\Delta' = \cos^2 t - (2-\sqrt{3})(1 - 4\sin^2 t) = 1 - \sin^2 t - 2 + \sqrt{3} + 4(2-\sqrt{3})\sin^2 t$

$= (7 - 4\sqrt{3})\sin^2 t + \sqrt{3} - 1 > 0$, với mọi t

(vì $7 - 4\sqrt{3} > 0$, $\sqrt{3} - 1 > 0$)

$P = (2-\sqrt{3})(1 - 4\sin^2 t)$

$P = 0 \Leftrightarrow \sin^2 t = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sin t = \pm\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{6}, t = \dfrac{5\pi}{6}, t = \dfrac{7\pi}{6}, t = \dfrac{11\pi}{6}$ (vì $0 \le t \le 2\pi$)

$S = 2\cos t$

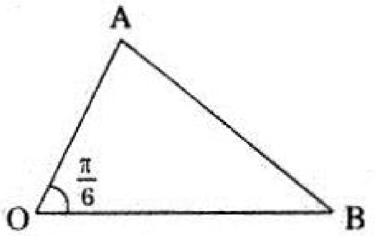
$S = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{2}, t = \dfrac{3\pi}{2}$

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
P		+	0	−	|	−	0	+	0	−	|	−	0	+	
S		+	|	+	0	−	|	−	|	−	0	+	|	+	

Ta có kết quả biện luận như sau:

- Nếu: $0 \le t < \frac{\pi}{6} \vee \frac{11\pi}{6} < t \le 2\pi$: $\Delta' > 0$, $P > 0$, $S > 0$ nên có: $0 < x_1 < x_2$
- Nếu: $\frac{\pi}{6} < t < \frac{5\pi}{6} \vee \frac{7\pi}{6} < t < \frac{11\pi}{6}$: $P < 0$ nên có: $x_1 < 0 < x_2$
- Nếu: $\frac{5\pi}{6} < t < \frac{7\pi}{6}$: $\Delta' > 0$, $P > 0$, $S < 0$ nên có: $x_1 < x_2 < 0$
- Nếu: $t = \frac{\pi}{6}$: $P = 0$ nên có: $x_1 = 0$, $x_2 = 2\cos t = \sqrt{3}$
- Nếu : $t = \frac{5\pi}{6}$: $P = 0$ nên có: $x_1 = 0$, $x_2 = 2\cos t = -\sqrt{3}$
- Nếu: $t = \frac{7\pi}{6}$: $P = 0$ nên có: $x_1 = 0$, $x_2 = 2\cos t = -\sqrt{3}$
- Nếu: $t = \frac{11\pi}{6}$: $P = 0$ nên có: $x_1 = 0$, $x_2 = 2\cos t = \sqrt{3}$.

b) Tam giác AOB cho ta: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos\frac{\pi}{6}$



$$= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1.x_2.\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 - \sqrt{3}\,x_1.x_2$$
$$= (x_1 + x_2)^2 - (2 + \sqrt{3})x_1.x_2$$
$$= (2\cos t)^2 - (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})(1 - 4\sin^2 t)$$
$$= 4\cos^2 t - (1 - 4\sin^2 t) = 4(\cos^2 t + \sin^2 t) - 1 = 3$$

Vậy ta có: $AB = \sqrt{3}$

Trong ΔAOB, ta có: $2R = \frac{AB}{\sin\widehat{AOB}} \Leftrightarrow 2R = \frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAOB là $R = \sqrt{3}$.

Đề 6.15

Tam giác ABC với cạnh là a = BC, b = AC, c = AB.

a) Lập hệ thức giữa a, b, c sao cho $\hat{B} = 3\hat{C}$.

b) Với C cho trước. Chứng minh: $c < b < 3c$.

c) Tìm các góc của ΔABC sao cho $\hat{B} = 3\hat{C}$ và biết độ dài a và $b + c = k$.

Giải

a) Tam giác ABC cho ta: $A = \pi - (B + C) = \pi - (3C + C) = \pi - 4C$

$$\Rightarrow \quad \sin A = \sin 4C$$

Ta lại có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin 4C} = \dfrac{b}{\sin 3C} = \dfrac{c}{\sin C}$ (do B = 3C)

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\sin 4C} = \frac{b}{\sin 3C} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b + c}{\sin 3C + \sin C} = \frac{b - c}{\sin 3C - \sin C} \quad (1)$$

(Tính chất tỉ lệ thức)

Từ (1) suy ra: $\dfrac{a}{\sin 4c} = \dfrac{b + c}{\sin 3c + \sin c} \Leftrightarrow \dfrac{a}{2\sin 2c.\cos 2c} = \dfrac{b + c}{2\sin 2c.\cos c}$

$$\Leftrightarrow \quad a\cos c = (b + c)\cos 2c \quad \Leftrightarrow \quad a\cos c = (b + c)(2\cos^2 c - 1) \quad (2)$$

Từ (1) ta lại có:

$$\frac{a}{\sin 4C} = \frac{b - c}{\sin 3C - \sin C} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{2\sin 2C.\cos 2C} = \frac{b - c}{2\cos 2C.\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = 2(b - c)\cos C \text{ (do } \sin 2C = 2\sin C\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C = \frac{a}{2(b - c)}$$

Thế $\cos C = \dfrac{a}{2(b - c)}$ vào (2) ta được: $\dfrac{a^2}{2(b - c)} = (b + c)\left[2.\dfrac{a^2}{4(b - c)^2} - 1\right]$

$$\Leftrightarrow \quad a^2.(b - c) = (b + c)[a^2 - 2(b - c)^2]$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2(b - c) = a^2(b + c) - 2(b + c)(b - c)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(b + c)(b - c)^2 = 2a^2c$$

Vậy: $(b + c)(b - c)^2 = a^2c$ là hệ thức cần tìm.

b) Từ $\dfrac{b}{\sin 3C} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow b = c.\dfrac{\sin 3C}{\sin C} = c.\dfrac{3\sin C - 4\sin^3 C}{\sin C}$

$$\Rightarrow \quad b = c(3 - 4\sin^2 C) = c(4\cos^2 C - 1) \quad (*)$$

Vì: $A = \pi - 4C$ nên: $C = \dfrac{1}{4}(\pi - A)$

do đó: $0 < C < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos C < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \cos^2 C < 1$

Suy ra: $1 < 4\cos^2 C - 1 < 3$. Vậy ta có: $c < b < 3c$ (do (*)).

c) Ta có: $b = 3C$ và $A = \pi - 4C$ nên ta chỉ cần tìm C.

Với $b + c = k$ thì (2) cho ta:

$$a\cos c = k(2\cos^2 c - 1) \Leftrightarrow 2k\cos^2 c - a\cos c - k = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2kx^2 - ax - k = 0 \text{ (với } x = \cos c,\ \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1)$$

Ta có : $\Delta a^2 + 8k^2 > 0$

$$f(1) = 2k - a - k = k - a > 0 \quad (\text{vì } k = b + c > a)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = k - \frac{a\sqrt{2}}{2} - k = -\frac{a\sqrt{2}}{2} < 0 \quad (\text{với } f(x) = 2kx^2 - ax - k)$$

Với $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ và $f(1) > 0$ thì phương trình nêu trên có 2 nghiệm x_1 , x

thỏa: $x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < x_2 < 1$. Do đó ta chỉ nhận $x = x_2 = \frac{1}{4k}\left(a + \sqrt{a^2 + 8k^2}\right)$

Suy ra: $C = \arccos\frac{1}{4k}\left(a + \sqrt{a^2 + 8k^2}\right)$.

Đề 6.16

Cho tam giác có nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp lần lượt là p, R và r.

Chứng minh độ dài 3 cạnh của tam giác là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0.$$

Giải

3 cạnh a, b , c của tam giác là nghiệm của phương trình:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 - 2px^2 + (ab + bc + ca)x - abc = 0$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh các hệ thức sau:

$$\begin{cases} ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4Rr & (1) \\ abc = 4Rrp & (2) \end{cases}$$

Thật vậy, trong tam giác thì có công thức diện tích là:

$$S = pr = \frac{abc}{4R} \quad \Rightarrow \quad abc = 4Rrp \quad \Rightarrow \quad (2) \text{ là đúng.}$$

Ta lại có: $r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}$

$$= \frac{1}{p}\left[p^3 - (a + b + c)p^2 + (ab + bc + ca)p - abc\right]$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{1}{p}[p^3 - 2p^3 + (ab + bc + ca)p - abc] \quad (\text{vì } a + b + c = 2p)$$

$$= \frac{1}{p}(-p^3 + (ab + bc + ca)p - 4Rrp)$$

$$= -p^2 + ab + bc + ca - 4Rr$$

$$\Rightarrow \quad r^2 + p^2 + 4Rr = ab + bc + ca.$$

Do đó (1) là đúng. Vậy bài toán đã được giải xong.

C. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

Đề 6.17

Tính: a) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$ b) $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$ c) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$.

Giải

a) Đặt: $x = \arcsin\frac{1}{3}$ thì có: $\sin x = \frac{1}{3}$ (với $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$)

Suy ra: $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Vậy: $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) Đặt: $x = \arccos\frac{1}{4}$ thì có: $\cos x = \frac{1}{4}$ $\left(\text{với } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

nên: $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Ta có: $\sin 2x = 2\sin x.\cos x = 2.\frac{\sqrt{15}}{4}.\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

Vậy: $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

c) Đặt: $x = \arcsin\frac{1}{5}$ thì $\sin x = \frac{1}{5}$ (với $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$)

Ta có: $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Suy ra: $\operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$. Vậy: $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{5}\right) = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

Đề 6.18

Tính: a) $A = \arccos\frac{2}{5} - \arccos\frac{1}{4}$ b) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

Giải

a) Đặt : $x = \arccos\frac{2}{5}$, $y = \arccos\frac{1}{4}$

thì có: $\cos x = \frac{2}{5}$, $\cos y = \frac{1}{4}$ $\left(0 \le x, y \le \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra: $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Ta có: $\cos A = \cos(x - y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{2}{5}.\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{21}}{5}.\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{2 + \sqrt{315}}{20}$$

Ta lại có: $\cos x > \cos y > 0$ nên suy ra: $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ tức là: $A = x - y < 0$

Vậy: $A = -\arccos\left(\frac{2 + \sqrt{315}}{20}\right)$.

b) Đặt: $x = \text{arctg}\,\frac{1}{3}$, $y = \text{arctg}\,\frac{1}{4}$

thì có: $\text{tg}x = \frac{1}{3}$, $\text{tg}y = \frac{1}{4}$ $\left(\text{với } 0 < y < x < \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có: $$\text{tg}B = \text{tg}(x - y) = \frac{\text{tg}x - \text{tg}y}{1 + \text{tg}x\text{tg}y} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{3}.\frac{1}{4}} = \frac{1}{13}$$

Vậy: $B = \text{arctg}\,\frac{1}{13}$.

Đề 6.19

Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\text{arctg}x + \text{arccotg}x = \frac{\pi}{2}$ **với** $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ **với** $\forall x \in [-1, 1]$

c) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ **với** $\forall x \in [-1, 1]$

d) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ **với** $\forall x \in [-1, 1]$

e) $\text{arctg}\,\frac{a}{b} + \text{arctg}\,\frac{b}{a} = \frac{\pi}{2}$ **với** $ab > 0$.

Giải

a) Đặt: $\alpha = \text{arctg}x$ thì $\text{tg}\alpha = x$ (với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

$\text{tg}\alpha = x \Rightarrow \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x \Rightarrow \text{arccotg}x = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (với $0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \pi$)

Suy ra: $\text{arctg}x + \text{arccotg}x = \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$.

b) Đặt: $\alpha = \arcsin x$ thì có: $\sin\alpha = x$ (với $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$)

Với $\sin x = x \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x \Rightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (với $0 \le \frac{\pi}{2} - \alpha \le \pi$)

Suy ra: $\arcsin x + \arccos x = \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$.

c) Đặt: $\alpha = \arcsin(-x)$ thì: $\sin\alpha = -x$ (với $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$)

Từ: $\sin\alpha = -x$ suy ra: $\sin(-\alpha) = x \Rightarrow \arcsin x = -\alpha$ (với $-\frac{\pi}{2} < -\alpha \le \frac{\pi}{2}$)

$$\Rightarrow \arcsin x = -\arcsin(-x)$$

Vậy: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

d) Đặt: $\alpha = \arccos(-x)$ thì có $\cos\alpha = -x$ (với $0 \le \alpha \le \pi$)

Từ $\cos\alpha = -x$; suy ra: $\cos(\pi - \alpha) = x$ (với $0 \le \pi - \alpha \le \pi$)

$$\Rightarrow \pi - \alpha = \arccos x$$

$$\Rightarrow \pi - \arccos(-x) = \arccos x$$

Do đó: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

e) Đặt: $x = \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$ thì: $\operatorname{tg}x = \frac{a}{b}$ (với $0 < x < \frac{\pi}{2}$)

$$\Rightarrow \operatorname{cotg}x = \frac{b}{a} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{b}{a} \quad (\text{với } 0 < \frac{\pi}{2} - x < \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - x = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

Do đó: $\operatorname{arctg}\frac{a}{b} + \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{2}$.

Đề 6.20

Giải phương trình:

a) $\arccos x + \arccos(\sqrt{3}\,x) = \frac{\pi}{2}$ **b)** $\arcsin x = \arccos x\,\sqrt{1 - x^2}$.

Giải

a) Phương trình được viết thành: $\arccos(\sqrt{3}\,x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\,x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \Rightarrow \sqrt{3}\,x = \sin(\arccos x)$$

$$\Rightarrow 3x^2 = \sin^2(\arccos x) \Rightarrow 3x^2 = 1 - \cos^2(\arccos x) \Rightarrow 3x^2 = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Thử lại: Với $x = \frac{1}{2}$: $\arccos x = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\arccos\sqrt{3}\,x = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Do đó phương trình thỏa mãn.

Với $x = -\frac{1}{2}$: $\quad \arccos x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$$\arccos x\sqrt{3} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

Do đó phương trình không thỏa mãn.

Kết luận: $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm.

b) Điều kiện là: $\quad 1 - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 1$

Phương trình cho ta: $\quad \cos(\arcsin x) = \cos\left(\arccos\sqrt{1 - x^2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \tag{1}$$

Đặt: $y = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad \sin y = x \quad$ (với $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$)

$$\Rightarrow \quad \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Vậy mọi $x \in [-1, 1]$ là nghiệm của phương trình.

Chương VII

GIẢI MỘT SỐ ĐỀ THI TỪ 1990 ĐẾN 1998

Đề 1

a) Giải phương trình: $\sin 3y + \sin y - 2\cos^2 y = 0$.

b) Tìm các nghiệm trên khoảng $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ của phương trình:

$$\sin\left(\frac{30x+21}{6x-1}\right) + \sin\left(\frac{10x+7}{6x-1}\right) - 2\cos^2\left(\frac{10x+7}{6x-1}\right) = 0 \qquad (*)$$

(ĐẠI HỌC TỔNG HỢP TP.HCM 1990)

Giải

a) Ta có: $\sin 3y + \sin y - 2\cos^2 y = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin y - 4\sin^3 y + \sin y - 2(1 - \sin^2 y) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\sin^3 y - 2\sin^2 y - 4\sin y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\sin y - 1)(2\sin^2 y + \sin y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin y = 1, \quad \sin y = -1, \quad \sin y = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad y = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad y = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad y = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$$

b) Đặt: $y = \frac{10x+7}{6x-1}$ thì: $3y = \frac{30x+21}{6x-1}$

Nên phương trình (*) trở thành: $\sin 3y + \sin y - 2\cos^2 y = 0$

Do đó theo câu a) thì có: $y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad y = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Xét hàm số: $y = \frac{10x+7}{6x-1}$ với: $-\infty < x \le -\frac{1}{2}$; $\quad y' = \frac{-52}{(6x-1)^2} < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$
y'		$-$	
y	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

Suy ra rằng: $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{5}{3}$

Với: $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$: $\; -\frac{1}{2} \le \frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{5}{3}$ thì $k = 0$ (vì $k \in \mathbb{Z}$) nên có: $y = \frac{\pi}{2}$

Với: $y = \frac{\pi}{6} + k2\pi$: $-\frac{1}{2} \le \frac{\pi}{6} + k2\pi < \frac{5}{3}$ thì $k = 0$ và có: $y = \frac{\pi}{6}$

Với: $y = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$: $-\frac{1}{2} \le \frac{5\pi}{6} + k2\pi < \frac{5}{3}$ thì không có $k \in Z$ nên thoa.

Từ: $y = \dfrac{10x + 7}{6x - 1}$ thì có: $6xy - y = 10x + 7$

$$\Leftrightarrow \quad x(6y - 10) = y + 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y + 7}{6y - 10}$$

Với: $y = \frac{\pi}{2}$ thì: $x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 7}{3\pi - 10}$; Với: $y = \frac{\pi}{6}$ thì: $x = \dfrac{\frac{\pi}{6} + 7}{\pi - 10}$

Vậy các nghiệm $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ gồm: $x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 7}{3\pi - 10}$, $x = \dfrac{\frac{\pi}{6} + 7}{\pi - 10}$.

Đề 2

a) Chứng minh với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì: $2^{\sin x} + 2^{\mathrm{tg}x} \ge 2^{(x+1)}$ (*)

b) Trong tam giác ABC với a, b, c là độ dài các cạnh và thỏa:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}. \quad \textbf{Chứng minh rằng: } c = \frac{1}{2}(a + b).$$

(ĐẠI HỌC NGÂN HÀNG 1990)

Giải

a) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$2^{\sin x} + 2^{\mathrm{tg}x} \ge 2\sqrt{2^{\sin x + \mathrm{tg}x}} = 2.2^{\frac{1}{2}(\sin x + \mathrm{tg}x)} \qquad (1)$$

Do đó để chứng minh (*) ta cần chứng minh rằng:

$$2^{\frac{1}{2}(\sin x + \mathrm{tg}x)} \ge 2^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\sin x + \mathrm{tg}x) \ge x \qquad (2)$$

Xét hàm số: $f(x) = \sin x + \mathrm{tg}x - 2x$, với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0$$

Vì theo bất đẳng thức Côsi thì:

$\cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} \ge 2\sqrt{\cos x.\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{2}{\sqrt{\cos x}} > 2$ (do $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $0 < \cos x < 1$)

Vì $f(x) > 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên f là hàm số tăng trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra:

Với: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì: $f(x) > f(0) \quad \Leftrightarrow \quad \sin x + \mathrm{tg}x - 2x > 0$ (vì $f(0) = 0$)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\sin x + \text{tg}x) > x.$$ Do đó (2) là đúng.

Từ (1) và (2) suy ra: $2^{\sin x} + 2^{\text{tg}x} \geq 2.2^{x} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\sin x} + 2^{\text{tg}x} \geq 2^{x+1}$

b) Ta có: $c = \frac{1}{2}(a + b) \quad \Leftrightarrow \quad \sin C = \frac{1}{2}(\sin A + \sin B)$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A-B}{2}$$

$$\left(\text{vì } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ nên } \cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A+B}{2}, \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 3\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$$

Vậy ta đã chứng minh rằng nếu: $\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$ thì: $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Đề 3

a) Giải phương trình: $\frac{\cos 2x + 3\text{cotg}2x + \sin 4x}{\text{cotg}2x - \cos 2x} = 2.$

b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là:

$$\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B.$$

(ĐẠI HỌC KINH TẾ TP.HCM 1990)

Giải

a) Điều kiện: $\text{cotg}2x - \cos 2x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x\left(\frac{1}{\sin 2x} - 1\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \text{ và } \sin 2x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x \neq 0 \text{ và } \cos 2x \neq 0$$

Ta có: $\frac{\cos 2x + 3\text{cotg}2x + \sin 4x}{\text{cotg}2x - \cos 2x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cos 2x + \text{cotg}2x + \sin 4x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x\left(3 + \frac{1}{\sin 2x} + 2\sin 2x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 + \frac{1}{\sin 2x} + 2\sin 2x = 0$$

(vì $\cos 2x \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = -1; \quad \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

Với: $\sin 2x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Với: $\sin 2x = -\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $2x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi$ hay $x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$

Vì điều kiện ($\cos 2x \neq 0$, $\sin 2x \neq 0$) nên nghiệm của phương trình là:

$$x = -\frac{\pi}{12} + k\pi\ ,\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi.$$

b) Ta có: $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B = 4\sin A\sin B$

$\sin A\cos A - \sin A\sin B + \sin B\cos B - \sin A\sin B = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin A\,(\cos A - \sin B) + \sin B\,(\cos B - \sin A) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A.\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - \sin B\right] + \sin B\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - \sin A\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B-A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right) +$$

$$+ \ \sin B\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)\underbrace{\left[\sin A\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B-A}{2}\right) + \sin B\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\right]}_{M} = 0 \ (*)$$

$$\text{Với: } M = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\left[\cos\frac{B-A}{2} - \sin\frac{B-A}{2}\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin B\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{A-B}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B-A}{2}[\sin A + \sin B| + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{A-B}{2}(\sin A - \sin B)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B-A}{2}(\sin A + \sin B) + \sqrt{2}\sin^2\frac{A-B}{2}.\cos\frac{A+B}{2} > 0$$

Vì: $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{B-A}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ nên: $\cos\dfrac{B-A}{2} > 0$;

$0 < \dfrac{A+B}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ nên: $\cos\dfrac{A+B}{2} > 0$; $\sin A > 0$; $\sin B > 0$

Do đó: (*) $\Leftrightarrow \quad \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{A+B}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A + B = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{\pi}{2}$$

Vậy: $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B \Leftrightarrow$ tam giác ABC vuông tại C.

Đề 4

a) Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số:

$$y = 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x$$

b) Tìm a sao cho phương trình: $2^{\cos x} + a\cos x = 3 + \sin^2 x$

có một nghiệm duy nhất trên miền: $0 \le x < 2\pi$.

(ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP.HCM 1991)

Giải

a) Ta có: $y = 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x$

$$= 1 - \cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{5}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{3}{2}(\cos 2x + \sin 2x) + \frac{7}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{7}{2}$$

Do đó: $y_{Max} = \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{7}{2}$ ứng với $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$y_{min} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{7}{2}$ ứng với $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

b) Ta có: $2^{\cos x} + a\cos x = 3 + \sin^2 x \Leftrightarrow 2^{\cos x} + a\cos x = 3 + (1 - \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos x} = -\cos^2 x - a\cos x + 4 \quad (*)$$

Đặt $t = \cos x$ thì $(*)$ cho ta: $2^t = -t^2 - at + 4$ (1)

Với: $0 \le x < 2\pi$ thì: $-1 \le t \le 1$ và ta có: $(*)$ có đúng một nghiệm $x \in [0, 2\pi]$, khi (1) có nghiệm là $t = \pm 1$ (với $t \ne \pm 1$ thì với mỗi nghiệm t sẽ cho 2 nghiệm $x \in [0, 2\pi]$).

- Nếu: $t = 1$ là nghiệm của (1) thì có: $a = 1$.
- Nếu: $t = -1$ là nghiệm của (1) thì có: $a = -\frac{5}{2}$

Với $a = 1$: (1) $\Leftrightarrow 2^t = -t^2 - t + 4$

Xét: $f'(t) = -t^2 - t + 4$, $-1 \le t \le 1$

$f(t) = -2t - 1$

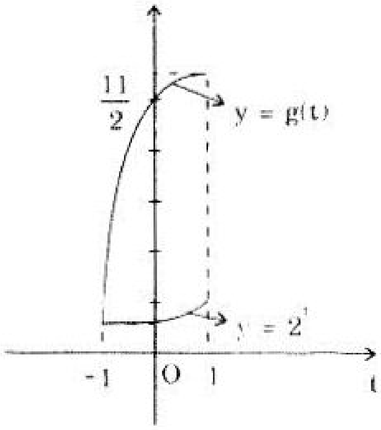
t	-1		$-\frac{1}{2}$		1
f '(t)		+	0	−	
f(t)	4	↗	CĐ	↘	2

Ta có: $f(t) \ge 2, \forall t \in [-1, 1]$

Mặt khác với: $-1 \le t \le 1$ thì: $2^t \le 2$ nên (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^t = 2 \\ -t^2 - t + 4 = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $t = 1$ (lúc đó $(*)$ có nghiệm duy nhất là $x = 0$).

Với $a = -\dfrac{5}{2}$: $(1) \Leftrightarrow 2^t = -t^2 + \dfrac{5}{2}t + 4$



Xét: $g(t) = -t^2 + \dfrac{5}{2}t + 4, \ -1 \le t \le 1$

$g'(t) = -2t + \dfrac{5}{2}$, $\quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{4}$

t	-1		1
$g'(t)$		+	
$g(t)$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{11}{2}$

Đồ thị $y = g(t)$ và đồ thị $y = 2^t$ chỉ cắt nhau tại một điểm là $\left(t = -1, y = \dfrac{1}{2}\right)$ nên (1) có đúng một nghiệm $t = -1$ và lúc đó (*) có nghiệm duy nhất là $x = \pi$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x \in [0, \pi]$ khi: $a = 1$, $a = -\dfrac{5}{2}$.

Đề 5

Cho phương trình: $(a - 1)\text{tg}^2x + \dfrac{2}{\cos x} - 1 - 3a = 0$.

a) Giải phương trình với $a = \dfrac{1}{2}$.

b) Tìm a để phương trình có nhiều hơn một nghiệm trong khoảng $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(ĐẠI HỌC KINH TẾ TP.HCM 1991)

Giải

a) Với $a = \dfrac{1}{2}$ thì phương trình trở thành: $-\dfrac{1}{2}\text{tg}^2x + \dfrac{2}{\cos x} - \dfrac{5}{2} = 0$

(Điều kiện là: $\cos x \ne 0$)

Đặt $X = \dfrac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad X^2 = \text{tg}^2x + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{tg}^2x = X^2 - 1$

Phương trình được viết thành: $-\dfrac{1}{2}(X^2 - 1) + 2X - \dfrac{5}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \ -X^2 + 4X - 4 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi.$

b) Vẫn với $X = \dfrac{1}{\cos x}$, thế vào phương trình ta có:

$(a - 1)(X^2 - 1) + 2X - 1 - 3a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(X^2 - 4) - (X^2 - 2X) = 0$

$\Leftrightarrow \ (X - 2)[a(X + 2) - X] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 2$ hay $X = \dfrac{2a}{1 - a}$ (với $a \ne 1$)

Với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $0 < \cos x < 1$ nên $X > 1$. Do đó muốn phương trình có nhiều hơn một nghiệm $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì phải có hai nghiệm $x > 1$, tức là phải có:

$$\begin{cases} \frac{2a}{1-a} > 1 \\ \frac{2a}{1-a} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3a-1}{1-a} > 1 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < a < 1 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy: $\frac{1}{3} < a < 1 \left(a \neq \frac{1}{2}\right)$ thì phương trình có nhiều hơn một nghiệm $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Đề 6

a) Giải phương trình: $3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \sin 2x$ **(1)**

b) Tìm a để (1) tương đương với phương trình sau:

$$m\cos 3x + (4 - 8m)\sin^2 x + (7m - 4)\cos x + (8m - 4) = 0 \qquad (2)$$

(ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG 1991)

Giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow 3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = \cos x - \cos 3x$

$\Leftrightarrow 2\cos x + 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \pi + k2\pi.$

b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m(4\cos^3 x - 3\cos x) + (4 - 8m)(1 - \cos^2 x) + (7m - 4)\cos x + 8m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4m\cos^3 x - (4 - 8m)\cos^2 x + (4m - 4)\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x[m\cos^2 x - (1 - 2m)\cos x + (m - 1)] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hay $m\cos^2 x + (2m - 1)\cos x + m - 1 = 0 \quad (*)$

- Nếu $m = 0$: thì $(*) \Leftrightarrow \cos x = -1$. Lúc đó (2) tương đương với (1).
- Nếu $m \neq 0$: thì $(*) \Leftrightarrow \cos x = -1$; $\cos x = \frac{1-m}{m}$

Để (1) tương đương với (2) thì:

$$\left|\frac{1-m}{m}\right| > 1 \text{ hay } \frac{1-m}{m} = -1 \text{ hay } \frac{1-m}{m} = 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2} \text{ hay } m = 1$$

Vậy (1) tương đương (2) khi: $m < \frac{1}{2}$ hay $m = 1$.

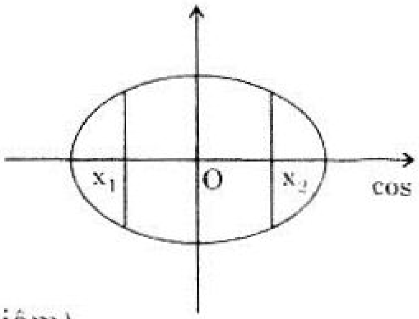
Đề 7

Tìm m để phương trình: $\cos 3x - \cos 2x + m\cos x - 1 = 0$

có đúng bảy nghiệm khác nhau thuộc khoảng: $-\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$.

(ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM 1991)

Giải



Đặt $X = \cos x$ thì phương trình trở thành:

$$4X^3 - 3X - (2X^2 - 1) + mX - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4X^3 - 2X^2 + (m - 3)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad X = 0 \text{ hay } 4X^2 - 2X + m - 3 = 0 \qquad (*)$$

Với $X = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ (2 nghiệm)

Do đó muốn có đúng bảy nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm thỏa: $-1 < X_1 < 0 < X_2 < 1$ (nghiệm X_1 cho 2 nghiệm x và X_2 cho 3 nghiệm x) $\Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 0 \\ m + 3 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3.$

Đề 8

Giải phương trình: $\mathbf{4\cos^2 x + 3tg^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\,tgx + 4 = 0.}$

(TRUNG TÂM ĐÀO TẠO VÀ BỒI DƯỠNG CÁN BỘ Y TẾ TP.HCM 1992)

Giải

Phương trình được viết thành:

$$(4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x + 3) + (3tg^2 x + 2\sqrt{3}\,tgx + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\,tgx + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}tgx + 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi.$$

Đề 9

Tìm m sao cho: $\mathbf{|2\cos x - 1| + |2\sin x - 1| \le m}$ **với mọi** $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$.

(ĐẠI HỌC TÀI CHÁNH KẾ TOÁN TP.HCM 1992)

Giải

Đặt: $y = |2\cos x - 1| + |2\sin x - 1| \quad (y \ge 0)$

thì: $y^2 = (2\cos x - 1)^2 + (2\sin x - 1)^2 + 2|(2\cos x - 1)(2\sin x - 1)|$

$= 6 - 4(\cos x + \sin x) + 2|4\sin x\cos x - 2(\cos x + \sin x) + 1|$

Đặt: $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

thì: $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \quad \Rightarrow \quad \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

nên: $y^2 = 6 - 4t + 2|2(t^2 - 1) - 2t + 1| = 2[3 - 2t + |2t^2 - 2t - 1|]$

Xét: $f(t) = 3 - 2t + |2t^2 - 2t - 1|$

$$\text{thì: } f(t) = \begin{cases} 3 - 2t + 2t^2 - 2t = 2t^2 - 4t + 2 \text{ nếu :} \\ -\sqrt{2} \le t \le \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \vee \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \le t \le \sqrt{2} \\ 3 - 2t - (2t^2 - 2t - 1) = -2t^2 + 4 \text{ nếu:} \\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \le t \le \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f'(t) = \begin{cases} 4t - 4 \text{ nếu : } -\sqrt{2} \le t < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \vee \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < t \le \sqrt{2} \\ -4t \text{ nếu: } \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} < t < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Do đó:

t	$-\sqrt{2}$		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{2}$
f '(t)		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	
f (t)	$6+4\sqrt{2}$	↘	$2+\sqrt{3}$	↗	4	↘	$2-\sqrt{3}$	↗	$6-\sqrt{2}$

$f(-\sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}$, $\quad f\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 3 - (1 - \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$, $\quad f(0) = 4$

$f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 3 - (1 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$, $\quad f(\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2}$

Suy ra: $f_{Max} = 6 + 4\sqrt{2} = 2(3 + 2\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} + 1)^2$

Nên: $y^2_{Max} = 2f_{Max} = 4(\sqrt{2} + 1)^2$ và ta có: $y_{Max} = 2(\sqrt{2} + 1)$

Để $|2\cos x - 1| + |2\sin x - 1| \le m$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì:

$$y_{Max} \le m \quad \Leftrightarrow \quad m \ge 2(\sqrt{2} + 1)$$

Vậy: $m \ge 2(\sqrt{2} + 1)$ là giá trị cần tìm.

Đề 10

1. Cho phương trình: $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) với $m = \dfrac{3}{2}$.

b) Tìm m để (1) có nghiệm x thỏa: $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

2. Cho tam giác ABC với độ dài cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng: A = 2B khi và chỉ khi: $a^2b(b + c)$.

3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x\cos y = \dfrac{1}{4} \\ 3\text{tg}x = \text{tg}y \end{cases}$

(ĐẠI HỌC NGÂN HÀNG 1992)

Giải

1.a) $\cos 2x - 4\cos x + \dfrac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 4\cos x + \dfrac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}, \quad \cos x = \dfrac{3}{2}$ (loại)

với $\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

b) Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$

$\Leftrightarrow 2t^2 - (2m+1)t + m = 0$ (với $t = \cos x$)

$\Leftrightarrow 2t^2 - t - m(2t-1) = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t-m) = 0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$ hay $t = m$

Với: $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ thì: $-1 \le t < 0$ nên $t = \dfrac{1}{2}$ không thích hợp, do đó phương trình (1) có nghiệm khi: $-1 \le m < 0$.

2. Ta có: $a^2 = b(b+c) \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + bc$

$\Leftrightarrow c - 2b\cos A = b \Leftrightarrow c - b = 2b\cos A$

$\Leftrightarrow \sin C - \sin B = 2\sin B\cos A$

$\Leftrightarrow \sin C - \sin B = \sin(B+A) + \sin(B-A)$

$\Leftrightarrow -\sin B = \sin(B-A)$ (vì $\sin(B+A) = \sin C$)

$\Leftrightarrow \sin(-B) = \sin(B-A) \Leftrightarrow -B = B - A \Leftrightarrow A = 2B$.

3. $\begin{cases} \sin x\cos y = \dfrac{1}{4} \\ 3\text{tg}x = \text{tg}y \end{cases}$ (điều kiện $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $y \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\cos y = \dfrac{1}{4} \\ 3\sin x\cos y = \sin y\cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\cos y = \dfrac{1}{4} \text{ (i)} \\ \sin y\cos x = \dfrac{3}{4} \text{ (ii)} \end{cases}$

(i) + (ii) cho ta: $\sin(x+y) = 1 \Leftrightarrow x + y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

(i) – (ii) cho ta: $\sin(x-y) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x - y = -\dfrac{\pi}{6} + k'2\pi$

hay: $x - y = \dfrac{7\pi}{6} + k'2\pi$

- Với: $\begin{cases} x + y = k2\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ x - y = -\dfrac{\pi}{6} + k'2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + (k + k')\pi \\ y = \dfrac{\pi}{3} + (k - k')\pi \end{cases}$

- Với: $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x - y = \dfrac{7\pi}{6} + k'2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + (k + k')\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + (k - k')\pi \end{cases}$

Đề 11

1. Giải phương trình: $\cos 3x + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\sin 2x - 2\cos x = 0.$

2. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số: $y = \dfrac{\cos^2 x + \sin x\cos x}{1 + \sin^2 x}$.

(ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP.HCM 1992)

Giải

1. Phương trình được viết thành: $4\cos^3 x - 3\cos x + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x - 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x\left(4\cos^2 x + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\sin x - 5\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad$ hay $\quad 4\sin^2 x - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\sin x + 1 = 0 \qquad \left(\Delta = \dfrac{9}{4} - 16 < 0\right)$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

2. Ta có: $y = \dfrac{\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}\sin 2x}{1 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)} = \dfrac{1 + \cos 2x + \sin 2x}{3 - \cos 2x}$

$\Leftrightarrow \; 3y - y\cos 2x = 1 + \cos 2x + \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad (y + 1)\cos 2x + \sin 2x = 3y - 1$

Phương trình trên có nghiệm khi:

$(y + 1)^2 + 1 \geq (3y - 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8y^2 - 8y - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{4 - 2\sqrt{6}}{8} \leq y \leq \dfrac{4 + 2\sqrt{6}}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2 - \sqrt{6}}{4} \leq y \leq \dfrac{2 + \sqrt{6}}{4}$

Vậy: $y_{Max} = \dfrac{2 + \sqrt{6}}{4}$ và $y_{Min} = \dfrac{2 - \sqrt{6}}{4}$.

Đề 12

Cho a > 0. Giải phương trình: $|\sin x + \cos x| + a\sin 2x = 1.$

(ĐẠI HỌC TÀI CHÁNH KẾ TOÁN TP.HCM 1993)

Giải

Đặt: $t = |\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|,\ 0 \le t \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow\quad t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \quad\Rightarrow\quad \sin 2x = t^2 - 1$

Phương trình trở thành: $t + a(t^2 - 1) = 1$

$\Leftrightarrow\quad at^2 + t - (a + 1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t = 1,\ t = -\frac{a+1}{a} < 0$ nên chỉ nhận $t = 1$

$$\Leftrightarrow\quad \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Với $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$

  $\Leftrightarrow\quad x = k2\pi$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

- Với $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4} \quad\Leftrightarrow\quad x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$

  $\Leftrightarrow\quad x = \pi + k2\pi$ hay $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

Kết luận: $x = k\frac{\pi}{2}$ là nghiệm.

Đề 13

Giải phương trình: $|\mathrm{tg}x| = \mathrm{cotg}x + \frac{1}{\cos x}$.

(ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC TP.HCM 1995)

Giải

Điều kiện: $x \ne k\frac{\pi}{2}$

i) Xét $\mathrm{tg}x > 0$: Phương trình trở thành:

$$\mathrm{tg}x = \mathrm{cotg}x + \frac{1}{\cos x} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

$$\sin^2 x = \cos^2 x + \sin x \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin x = 1 \text{ hay } \sin x = -\frac{1}{2}$$

Vì $x \ne k\frac{\pi}{2}$ nên loại $\sin x = 1$.

Với $\sin x = -\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Vì $\mathrm{tg}x > 0$ nên chỉ nhận $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

ii) Xét $\operatorname{tg}x < 0$: Phương trình trở thành: $-\operatorname{tg}x = \operatorname{cotg}x + \dfrac{1}{\cos x}$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad -\sin^2 x = \cos^2 x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x = -1 \quad (\text{loại vì } x \neq k\frac{\pi}{2})$$

Kết luận: $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Đề 14

1. Tìm k để bất phương trình sau vô nghiệm: $\sqrt{3}\sin x + 2\sin^2\dfrac{x}{2} \geq k$

2. Tìm nghiệm của bất phương trình: $\sqrt{3}\sin x + 2\sin^2\dfrac{x}{2} \geq 1$

thỏa điều kiện: $\log_2(x^2 - x + 2) \leq 2$.

(ĐẠI HỌC TỔNG HỢP TP.HCM 1995)

Giải

1. Xét: $y = \sqrt{3}\sin x + 2\sin^2\dfrac{x}{2} = \sqrt{3}\sin x + 1 - \cos x$

Theo bất đẳng thức Svac-xơ, ta có:

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{(3+1)(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 2$ Nên: $y \leq 3$ với mọi x

Suy ra: $y_{Max} = 3$

Ta có: $\sqrt{3}\sin + 2\sin^2\dfrac{x}{2} \geq k$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + 2\sin^2\dfrac{x}{2} < k \ \forall x$

$$\Leftrightarrow \quad y_{Max} < k \quad \Leftrightarrow \quad k > 3.$$

2. Ta có: $\log_2(x^2 - x + 2) \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(x^2 - x + 2) \leq \log_2 2^2$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < x^2 - x + 2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 \leq 0 - 1 \leq x \leq 2$$

Ta lại có: $\sqrt{3}\sin x + 2\sin^2\dfrac{x}{2} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\sin x + 1 - \cos x \geq 1$

$$\sqrt{3}\sin x + 1 - \cos x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\sin x - \cos x \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k2\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad k2\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + k2\pi$$

Do đó với điều kiện $-1 \leq x \leq 2$ thì nghiệm cần tìm là: $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq 2$.

Đề 15

Cho hàm số: $y_k = \dfrac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}$.

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của y_1 ứng với $k = 1$.

2. Tìm k để giá trị lớn nhất của y_k là nhỏ nhất .

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, KHỐI A 1996)

Giải

1. $$y_1 = \frac{2\cos x + 2}{\cos x + \sin x + 2} \text{ với } D = \mathbb{R}$$

Ta có: $y_1\cos x + y_1\sin x + 2y_1 = 2\cos x + 2 \Leftrightarrow (y_1 - 2)\cos x + y_1\sin x = 2 - 2y_1$

Phương trình trên có nghiệm khi: $(y_1 - 2)^2 + y_1^2 \geq (2 - 2y_1)^2$

$$\Leftrightarrow \quad 2y_1^2 - 4y_1 + 4 \geq 4y_1^2 - 8y_1 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2y_1^2 - 4y_1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq y_1 \leq 2$$

Vậy: $(y_1)_{Max} = 2$ và $(y_1)_{min} = 0$.

2. $$y_k = \frac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2} \; (D = \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad y_k\cos x + y_k\sin x + 2y_k = 2k\cos x + k + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (y_k - 2k)\cos x + y_k\sin x = k + 1 - 2y_k$$

Phương trình trên có nghiệm khi: $(y_k - 2k)^2 + y_k^2 \geq (k + 1 - 2y_k)^2$

$$\Leftrightarrow \quad 2y_k^2 - 4y_k - 3k^2 + 2k + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{6k^2 - 4k + 2}\right) \leq y_k \leq \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{6k^2 - 4k + 2}\right)$$

Do đó: $(y_k)_{Max} = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{6k^2 - 4k + 2}\right)$ và ta có $(y_k)_{Max}$ nhỏ nhất khi $6k^2 - 4k + 2$ nhỏ nhất tức là $k = \frac{1}{3}$.

Đề 16

Tìm $x \in (0, 2\pi)$ thỏa mãn: $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x$.

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, KHỐI A (LẦN 2) 1996)

Giải

Điều kiện: $\cos 2x \neq 1$. Ta có:

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos 2x\sin x = \sqrt{2\sin^2 x}.\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x.\sin x = |\sin x|\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Xét $0 < x \leq \pi$. Ta có $\sin x \geq 0$ nên phương trình trở thành:

$$\sin x\left(\cos 2x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x.(-2).\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right).\sin\frac{\pi}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x.\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \text{ hay } \sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow k\pi$ (loại vì điều kiện: $\cos 2x \neq 1$)

Với $\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{8} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$

Vì: $0 < x < \pi$ nên nhận: $x = \frac{\pi}{16}$, $x = \frac{9\pi}{16}$

Xét $\pi < x < 2\pi$: thì $\sin x < 0$ nên phương trình trở thành:

$$\cos 2x.\sin x = -\sin x.\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos 2x = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$$

Vì: $\pi < x < 2\pi$ nên: $x = \frac{21\pi}{16}$, $x = \frac{29\pi}{16}$

Kết luận: $x = \frac{\pi}{16}$, $x = \frac{21\pi}{16}$, $x = \frac{29\pi}{16}$.

Đề 17

1. Cho phương trình: $(3 + 2\sqrt{2})^{\text{tgx}} + (3 - 2\sqrt{2})^{\text{tgx}} = m$.

a) Giải phương trình khi $m = 6$.

b) Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm trong $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Cho tam giác ABC với AM là trung tuyến, góc $\widehat{AMB} = \alpha$, $AB = c$ và $AC = b$ và S là diện tích của tam giác ABC.

a) Chứng minh: $\text{cotgx} = \frac{b^2 - c^2}{4S}$.

b) Cho $\alpha = 45^\circ$. Chứng minh: $\text{cotgC} - \text{cotgB} = 2$.

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, KHỐI A (KÌ 3) 1996)

Giải

1.a) $(3 + 2\sqrt{2})^{\text{tgx}} + (3 - 2\sqrt{2})^{\text{tgx}} = 6 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 6$ (với $X = (3 + 2\sqrt{2})^{\text{tgx}}$)

$$\Leftrightarrow X^2 - 6X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

- Với: $X = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (3 + 2\sqrt{2})^{\text{tgx}} = 3 + 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \text{tgx} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

- Với: $X = 3 - 2\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^{-1} \Leftrightarrow (3 + 2\sqrt{2})^{\text{tgx}} = (3 + 2\sqrt{2})^{-1}$

$$\Leftrightarrow \text{tgx} = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.

b) Với: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ thì: $-\infty < tgx < \infty$

Phương trình được viết thành: $X + \frac{1}{X} = m$ (với $X = (3 + 2\sqrt{2})^{tgx}$, $X > 0$)

$$\Leftrightarrow \quad X^2 - mX + 1 = 0$$

Để có đúng hai nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ thì ta phải có: $0 < X_1 < X_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < -2$ hay $m > 2$

$P > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 0$: luôn đúng

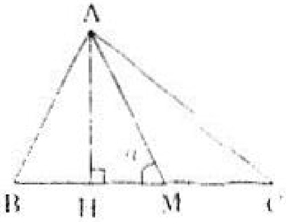
$S > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > 0$

Vậy $m > 2$ thì phương trình có đúng 2 nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2.a) Kẻ đường cao AH.

Trong tam giác ABC, ta có:

$AC^2 - AB^2 = 2BC.MH$ (với giả sử $AC > AB$)



$\Rightarrow \quad b^2 - c^2 = 2BC.MH \quad \Rightarrow \quad MH = \frac{b^2 - c^2}{2a}$ ($BC = a$)

Ta lại có: $S = \frac{1}{2}BC.AH \quad \Rightarrow \quad AH = \frac{2S}{a}$

Trong tam giác AMH: $\quad \cot g\alpha = \frac{MH}{AH} = \frac{b^2 - c^2}{2a}.\frac{a}{2S} = \frac{b^2 - c^2}{4S}$

Vậy: $\quad \cot g\alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}$.

b) Với $\alpha = 45^\circ$ thì tam giác AHM vuông cân nên $AH = MH$.

Trong tam giác AHC, ta có: $\cot gC = \frac{CH}{AH}$

Trong tam giác AHB, ta có: $\cot gB = \frac{BH}{AH}$

Do đó: $\cot gC - \cot gB = \frac{CH - BH}{AH} = \frac{(CM + MH) - (BM - MH)}{AH}$

$$= \frac{2MH}{AH} = 2 \quad \text{(vì } CM = BM,\ MH = AH\text{)}$$

Vậy: $\quad \cot gC - \cot gB = 2$.

Đề 18

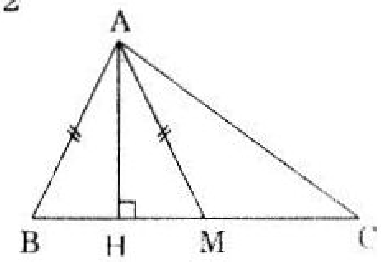
Cho tam giác ABC có trung tuyến AM thỏa: AM = AB.

1. Chứng minh: tgB = 3tgC. **2. Chứng minh: sinA = 2sin (B − C).**

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, KHỐI D 1996)

Giải

1. Kẻ đường cao AH thì ta có: $HB = HM = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}MC$



(vì AB = AM và MB = MC)

Trong tam giác vuông AHB, ta có: $tgB = \frac{AH}{HB}$

Trong tam giác vuông AHC, ta có: $tgC = \frac{AH}{HC}$

Nên: $\frac{tgB}{tgC} = \frac{AH}{HB}.\frac{HC}{AH} = \frac{HC}{HB} = \frac{3MH}{BH}$ (vì CM = BM = 2MH)

Vậy: $tgB = 3tgC$.

2. Ta có: $\sin A = 2\sin(B - C) \Leftrightarrow \sin(B + C) = 2\sin(B - C)$

(vì $A + B + C = \pi$ nên $\sin A = \sin(B + C)$)

$\Leftrightarrow \sin B\cos C + \sin C\cos B = 2(\sin B\cos C - \sin C\cos B)$

$\Leftrightarrow 3\sin C\cos B = \sin B\cos C$

$\Leftrightarrow 3\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin B}{\cos B} \Leftrightarrow 3tgC = tgB$. Điều này đúng (theo câu 1)

Vậy ta đã chứng minh rằng: $\sin A = 2\sin(B - C)$.

Đề 19

Tìm y để bất phương trình: $x^2 + 2x(\cos y - \sin y) + 2\sin^2 y \geq 0$ đúng với mọi x.

(ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM 1996)

Giải

Ta có: $x^2 + 2x(\cos y - \sin y) + 2\sin^2 y \geq 0$, đúng $\forall x$

$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (\cos y - \sin y)^2 - 2\sin^2 y \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin 2y - (1 - \cos 2y) \leq 0 \Leftrightarrow \cos 2y - \sin 2y \leq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2y + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \cos\left(2y + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow k2\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2y + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow k2\pi - \frac{3\pi}{4} \leq 2y \leq \frac{\pi}{4} + k2\pi$

$\Leftrightarrow k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq y \leq \frac{\pi}{8} + k\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

Đề 20

1. Giải phương trình: $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$.

2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\left(tg\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(tg\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(tg\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}.$$

(ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG 1996)

Giải

1. $2\cos^3x + \cos2x + \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^3x + 2\cos^2x - 1 + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2x(\cos x + 1) - (1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2(1 - \sin x)(1 + \sin x)(\cos x + 1) - (1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (1 - \sin x)[2(1 + \sin x)(\cos x + 1) - 1] = 0$

$\Leftrightarrow \quad (1 - \sin x)[2(\sin x + \cos x) + 2\sin x\cos x + 1] = 0$

- $1 - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
- $2(\sin x + \cos x) + 2\sin x\cos x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t + (t^2 - 1) + 1 = 0$

  (với $t = \sin x + \cos x \quad \Rightarrow \quad t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$)

  $\Leftrightarrow \quad t^2 + 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0,\ t = -2$
- Với: $t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x + \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$
- Với: $t = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x + \cos x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2$: vô nghiệm

Kết luận: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

2. Xét hàm số: $f(x) = (\operatorname{tg}x)^{2\sqrt{2}}$ với: $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Ta có: $f'(x) = 2\sqrt{2}.(1 + \operatorname{tg}^2x).(\operatorname{tg}x)^{2\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2}\left[(\operatorname{tg}x)^{2\sqrt{2}-1} + (\operatorname{tg}x)^{2\sqrt{2}+1}\right]$

$$f'(x) = 2\sqrt{2}\left[2\sqrt{2} - 1)(1 + \operatorname{tg}^2x)(\operatorname{tg}x)^{2\sqrt{2}-2}\right] + (2\sqrt{2} + 1)(1 + \operatorname{tg}^2x)(\operatorname{tg}x)^{2\sqrt{2}}]$$

Ta có: $f'(x) > 0$ với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nên đồ thị của $y = f(x)$ là lõm trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ và do đó ta có:

$$\frac{1}{3}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \quad \text{với } x_1, x_2, x_3 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Áp dụng với $x_1 = \frac{A}{2}$, $x_2 = \frac{B}{2}$, $x_3 = \frac{C}{2}$ thì có:

$$\frac{1}{3}\left[\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\right] \geq \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}\right)\right]^{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^{2\sqrt{2}} = 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{2}} = \frac{3}{3^{\sqrt{2}}} = 3^{1-\sqrt{2}}$$

Vậy: $\left(\text{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\text{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\text{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}$.

Đề 21

1. Cho tam giác ABC với AB = c, BC = a, AC = b thỏa: $b + c = 2a$.
Chứng minh: $2\sin A = \sin B + \sin C$.

2. Giải phương trình: $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

(ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI 1996)

Giải

1. Ta có: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$
nên từ: $2a = b + c$ suy ra: $2\sin A = \sin B + \sin C$.

2. Ta có: $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 = 5 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\sin 2x + \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\cos 2x\right)^2 - 5 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sin 2x\sin\frac{\pi}{6} + \cos 2x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1,\ \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}\ \text{(loại)}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7\pi}{12} + k\pi.$$

Đề 22

Cho phương trình: $4\cos^5 x\sin x - 4\sin^5 x\cos x = \sin^2 4x + m$ (1)

1. Biết rằng $x = \pi$ là một nghiệm của (1). Hãy giải phương trình (1) trong trường hợp đó.

2. Cho biết $x = -\frac{\pi}{8}$ là một nghiệm của (1). Hãy tìm tất cả nghiệm của (1) thỏa mãn: $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$.

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, KHỐI A ĐỢT 1, 1997)

Giải

1. Với $x = \pi$ thì $\sin x = 0$, $\cos x = -1$

Thế vào (1) ta có: $m = 0$ nên phương trình (1) trở thành:

$$4\cos^5 x\sin x - 4\sin^5 x\cos x = \sin^2 4x$$

$\Leftrightarrow \quad 4\sin x\cos x\,(\cos^4 x - \sin^4 x) = \sin^2 4x$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin 2x\,(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^2 4x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin 2x.\cos 2x = \sin^2 4x$

$\Leftrightarrow \quad \sin 4x\,(1 - \sin 4x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 4x = 0; \ \sin 4x = 1$

$\Leftrightarrow \quad 4x = k\pi \ k + 4x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\dfrac{\pi}{4}; \quad x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}.$

2. Phương trình (1) được viết thành: $\sin 4x = \sin^2 4x + m$

Với $x = -\dfrac{\pi}{8}$ là nghiệm thì $4x = -\dfrac{\pi}{2}$ có $\sin 4x = -1$ thỏa (1)

Thế vào phương trình, ta có: $-1 = 1 + m \Leftrightarrow m = -2$

Lúc đó (1) trở thành: $\sin 4x = \sin^2 4x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 4x - 4\sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin 4x = -1, \sin 4x = 2$ (loại) $\Leftrightarrow \quad 4x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}$

Điều kiện: $x^4 - 3x^2 + 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x^2 < 2$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} < x < -1$ hay $1 < x < \sqrt{2}$

Do đó chỉ nhận nghiệm là: $x = \pm\dfrac{3\pi}{8}$ (ứng với $k = 2$, $k = -1$).

Đề 23

1. Giải bất phương trình: $2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x > 2(\sin x + \cos x)$

2. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không có góc tù thì:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, KHỐI A, ĐỢT 2, 1997)

Giải

1. Ta có: $2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x > 2(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow \quad 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x\cos x\,(\sin x + \cos x) - 2(\sin x + \cos x) > 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)\,[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2] > 0$

Đặt: $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right), \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

$t^2 = 1 - 2\sin x\cos x$

thì: $2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2 = 2t + \dfrac{1 - t^2}{2} - 2 = \dfrac{1}{2}(-t^2 + 4t - 3)$

$= -\dfrac{1}{2}(t - 1)(t - 3) = \dfrac{1}{2}(t - 1)(3 - t)$

Để ý rằng $t \leq \sqrt{2}$ nên $3 - t > 0$, do đó bất phương trình trở thành:

$(\cos x + \sin x).(\cos x - \sin x - 1) > 0$

$f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên chỉ cần xét: $0 \leq x \leq 2\pi$

Ta có: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x + \cos x = 0$ hay $\cos x - \sin x = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x = -1 \quad \text{hay} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{hay} \quad x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = k2\pi, \quad x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Với $0 \leq 2\pi$ thì có: $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$; $x = 0$, $x = 2\pi$; $x = \frac{3\pi}{2}$

Ta có bảng xét dấu của f(x) như sau:

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 < 0$ nên trong khoảng $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ thì $f(x) < 0$

Suy ra nghiệm của bất phương trình gồm:

$$\frac{3\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi, \qquad \frac{7\pi}{4} + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi.$$

2. Ta giả sử: $A \leq B \leq C \leq \frac{\pi}{2}$ (vì ΔABC không tù). Suy ra: $\frac{\pi}{3} \leq C \leq \frac{\pi}{2}$

Ta có: $$y = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sin C}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C}$$

$$= \frac{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C} = \frac{2\cos\frac{C}{2}.x + \sin C}{2\sin\frac{C}{2}.x + \cos C} \quad \left(\text{với } x = \cos\frac{A-B}{2}\right)$$

Ta có: $$y' = \frac{2\cos\frac{C}{2}\cos C - 2\sin\frac{C}{2}\sin C}{\left(2\sin\frac{C}{2}.x + \cos C\right)^2} = \frac{2\cos\frac{3C}{2}}{\left(2\sin\frac{C}{2}.x + \cos C\right)^2} \leq 0$$

$$\left(\text{vì } \frac{\pi}{2} > C \geq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} > \frac{3C}{2} \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{3C}{2} \leq 0\right)$$

Nên y là hàm số giảm, và do đó :

Với: $x \leq 1$ thì: $$y \geq y(1) = \frac{2\cos\frac{C}{2} + \sin C}{2\sin\frac{C}{2} + \cos C}$$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{2\cos t + \sin 2t}{2\sin t + \cos 2t}$ $\left(\text{với } t = \dfrac{C}{2}, \dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{4}\right)$

thì: $$f'(t) = \frac{2(\sin 3t - 1)}{(2\sin t + \cos 2t)^2} \le 0$$

Suy ra: $$f(t) \ge f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\cos\frac{C}{2} + \sin C}{2\sin\frac{C}{2} + \cos C} \ge 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy: $$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \ge 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Đề 24

Cho phương trình: $\cos 4x = \cos^2 3x + a\sin^2 x$.

1. Bằng cách đổi biến $t = \cos 2x$, hãy giải phương trình khi $a = 1$.

2. Xác định tham số a để phương trình có nghiệm trong $\left(0, \dfrac{\pi}{12}\right)$.

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, ĐỢT 3, KHỐI A, 1997)

Giải

1. Với a = 1 thì phương trình trở thành: $\cos 4x = \cos^2 3x + \sin^2 x$

$\Leftrightarrow \quad 2t^2 - 1 = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 6x) + \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\Leftrightarrow \quad 2(2t^2 - 1) = 1 + 4t^3 - 3t + 1 - t \quad \Leftrightarrow \quad 4t^3 - 4t^2 - 4t + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad t^3 - t^2 - t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$ hay $t^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad t = 1$ hay $t = -1$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2x = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\dfrac{\pi}{2}.$

2. Với $0 < x < \dfrac{\pi}{12}$ thì $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < t = \cos 2x < 1$

Phương trình được viết thành: $2t^2 - 1 = \dfrac{1}{2}(1 + 4t^3 - 3t) + \dfrac{a}{2}(1 - t)$

$\Leftrightarrow \quad 4t^2 - 2 = 4t^3 - 3t + 1 + a(1 - t)$

$\Leftrightarrow \quad 4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 + a(1 - t) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (t - 1)(4t^2 - 3) + a(1 - t) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (t - 1)(4t^2 - 3 - a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1, \quad t^2 = \dfrac{a+3}{4}$

Do đó muốn có nghiệm: $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì phải có: $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < t < 1$

tức là có: $\dfrac{3}{4} < t^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{3}{4} < \dfrac{a+3}{4} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a < 1$

Đề 25

Tìm a để phương trình sau có nghiệm:

$$4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin^2 4x = m.$$

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, KHỐI D, 1997)

Giải

Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos^4 x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

$\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

Phương trình trở thành: $3 + \cos 4x - \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos 4x\right) - \sin^2 4x = m$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + (\cos^2 4x - 1) = m \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 4x - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2} = m$

$\Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = m$ (với: $t = \cos 4x$, $-1 \le t \le 1$)

Xét: $y = t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$, $-1 \le t \le 1$

$y' = 2t - \frac{1}{2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$

t	-1		$\frac{1}{4}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	$-\frac{9}{16}$	↗	0

Do đó phương trình trên có nghiệm khi: $-\frac{9}{16} \le m \le 1$.

Đề 26

Cho phương trình: $\sin 2x + \sqrt{3}\,m = 2\cos x + \sqrt{3}\,m\sin x$.

1. Giải phương trình với m = 1.

2. Tìm m để phương trình có nhiều hơn một nghiệm trong $(0, \pi)$.

(TRUNG TÂM ĐÀO TẠO – BỒI DƯỠNG CÁN BỘ Y TẾ TP.HCM 1997)

Giải

1. Với m = 1 thì phương trình trở thành: $\sin 2x + \sqrt{3} = 2\cos x + \sqrt{3}\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - \sqrt{3}) = 2\cos x - \sqrt{3} \Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})(\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ hay $\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi.$

2. Phương trình được viết thành: $\sin x\,(2\cos x - \sqrt{3}\,m) = 2\cos x - \sqrt{3}\,m$

$\Leftrightarrow \quad (2\cos x - \sqrt{3}\,m)(\sin x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \dfrac{\sqrt{3}m}{2}$ hay $\sin x = 1$

Với $0 < x < \pi$ thì $\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2}$ (có một nghiệm rồi)

Do đó để phương trình có nhiều hơn một nghiệm $x \in (0, \pi)$ thì phải có:

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{\sqrt{3}m}{2} < 1 \\ \dfrac{\sqrt{3}m}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} < m < \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (m \neq 0).$$

Đề 27

Giải phương trình: $2\text{tg}x + \text{cotg}x = \sqrt{3} + \dfrac{2}{\sin 2x}$.

(ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG 1997)

Giải

Điều kiện: $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

Phương trình được viết là:

$$\frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\sqrt{3}\sin 2x + 2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\sin^2 x + 1) = \sqrt{3}\sin 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos 2x = \sqrt{3}\sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi, \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Vì $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$ nên chỉ nhận $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

Đề 28

Giải phương trình: $\cos x = \cos^2\left(\dfrac{3x}{4}\right)$. *(ĐẠI HỌC HÀNG HẢI 1997)*

Giải

Ta có: $\cos x = \cos^2\left(\dfrac{3x}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \dfrac{1}{2}\left[1 + \cos\dfrac{3x}{2}\right]$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos 2t = 1 + \cos 3t \left(\text{với } t = \dfrac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2(\cos^2 t - 1) = 1 + 4\cos^3 t - 3\cos t$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 t - 4\cos^2 t - 3\cos t + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\cos t - 1)(4\cos^2 t - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos t = 1, \quad \cos t = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- $\cos t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k4\pi$
- $\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k4\pi$
- $\cos t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\dfrac{5\pi}{3} + k4\pi.$

Đề 29

1. Bằng cách dùng $t = \text{tg}x$, giải phương trình: $\sin x.\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$

2. Chứng minh rằng bất phương trình:

$\sin x(\cos^2 x + \sin 2x) + \sin 3x < 9\cos^3 x$ thỏa với mọi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM, 1997)

Giải

1. Ta có: $\sin x.\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x.\sin 2x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 6\cos^3 x$

Chia hai vế cho $\cos^3 x$ thì: $\quad 2\text{tg}^2 x + 3.\text{tg}x(1 + \text{tg}^2 x) - 4\text{tg}^3 x = 6$

$\Leftrightarrow \quad -\text{tg}^3 x + 2\text{tg}^2 x + 3\text{tg}x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}^3 x - 2\text{tg}^2 x - 3\text{tg}x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\text{tg}x - 2)(\text{tg}^2 x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}x = 2, \ \text{tg}x = \sqrt{3}, \ \text{tg}x = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad x = \text{arctg}2 + k\pi, \quad x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

2. Với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì $\cos x > 0$ nên bất phương trình tương đương với:

$$\frac{\sin x.\cos^2 x + \sin x.\sin 2x + \sin 3x}{\cos^3 x} < 9$$

$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x + 2\text{tg}^2 x + 3\text{tg}x\,(1 + \text{tg}^2 x) - 4\text{tg}^3 x < 9$

$\Leftrightarrow \quad -\text{tg}^3 x + 2\,\text{tg}^2 x + 4\text{tg}x < 9 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}^3 x - 2\,\text{tg}^2 x - 4\text{tg}x + 9 > 0$

$\Leftrightarrow \quad t^3 - 2t^2 - 4t + 9 > 0$ (với $t = \text{tg}x$)

Xét hàm số: $f(t) = t^3 - 2t^2 - 4t + 9$, $t > 0$

$f'(t) = 3t^2 - 4t - 4; \qquad f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2, \ t = -\dfrac{2}{3}$

t	0		2		∞
f '(t)		−	0	+	
f(t)		↘	1 min	↗	

Vì $f_{Min} = 1$ nên $f(t) > 0$, $\forall t > 0$

Do đó bất phương trình trên đúng với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Đề 30

Giải các phương trình lượng giác sau:

1. $\mathbf{3\cos^4 x - 4\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = 0}$ **2.** $\mathbf{\sin^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x}$.

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, KHỐI A, KÌ 1 - 1998)

Giải

1. Phương trình được viết thành:

$$3(\cos^2 x)^2 - 4\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3t^2 - 4t(1 - t) + (1 - t)^2 = 0 \quad (\text{với } t = \cos^2 x,\ t \in [0, 1])$$

$$\Leftrightarrow \quad 3t^2 - 4t + 4t^2 + 1 - 2t + t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8t^2 - 6t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{4} \vee t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 = \frac{1}{4} \vee \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \pm\frac{1}{2} \vee \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\cos x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$
- $\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$
- $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\frac{3\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$

Vậy: $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. Phương trình được viết thành: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)\right]^3 = \sqrt{2}\sin x$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin x - \cos x)^3 = 4\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}\right)^3 = \frac{4}{\sin^2 x} \quad (\text{chia 2 vế cho } \sin^3 x)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - \cot g x)^3 = 4(1 + \cot g^2 x) \quad \Leftrightarrow \quad (1 - t)^3 = 4(1 + t^2) \quad (\text{với } t = \cot g x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 3t + 3t^2 - t^3 = 4 + 4t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 + t^2 + 3t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t + 1)(t^2 + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot g x = -1 = \cot g\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Vậy: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Đề 31

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \geq 12.$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, KHỐI A, KÌ 2, 1998)

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}} \qquad (1)$$

Trước tiên, ta chứng minh:

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sin y) \leq \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad \text{với } 0 < x\ ,\ y \leq \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Thật vậy: (2) $\Leftrightarrow \quad \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right).\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \leq \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \leq 1$ (vì $0 < \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$) Do đó (2) đúng.

Hơn nữa (2) trở thành đẳng thức khi: $\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

Ta có , theo (2) thì:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\sin\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}\right) \leq 2\sin\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\frac{C}{2}+\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}}{2}\right)$$

$$\leq 2\left[\sin\left(\frac{A+B}{4}\right)+\sin\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+4\left(\frac{C}{2}\right)}{12}\right] \leq 2.2.\sin\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$$

Suy ra: $\quad \sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2} \leq 3\sin\left(\dfrac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}\right) = 3\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{2}$

Lại theo BĐT Côsi, ta có: $\quad \sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} \geq 3\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}} \geq 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}} \geq 4$$

Do đó (1) cho ta: $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}} \geq 12.$

Đẳng thức xảy ra khi (theo bất đẳng thức (2)):

$$\begin{cases} \dfrac{A}{2} = \dfrac{B}{2} \\ \dfrac{A}{2} = \dfrac{A+B+C}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \quad A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$$

Vậy đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC là tam giác đều.

Đề 32

Cho phương trình: $\cos 4x + 6\sin x\cos x = m$ với m là tham số.

1. Giải phương trình với $m = 1$.

2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, KHỐI A, KÌ 3, 1998)

Giải

1. Với $m = 1$ thì phương trình trở thành: $\cos 4x + 6\sin x\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin 2x = 1 - \cos 4x \quad \Leftrightarrow \quad 3\sin 2x = 2\sin^2 2x$

$\Leftrightarrow \quad \sin 2x(2\sin 2x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = 0 \vee \sin 2x = \dfrac{3}{2}$

Vì: $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ nên chỉ nhận: $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}$

Vậy: $x = k\dfrac{\pi}{2}$ là nghiệm.

2. Phương trình được viết thành: $1 - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x = m$

$$\Leftrightarrow \quad 2t^2 - 3t - 1 + m = 0 \text{ (với } t = \sin 2x) \qquad (1)$$

Với $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq \dfrac{\pi}{2}$ nên có $0 \leq t \leq 1$; hơn nữa ứng với mỗi giá trị của t chỉ có một giá trị của x. Do đó phương trình lượng giác trên có hai nghiệm phân biệt $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $t \in [0, 1]$, tức là phải có:

$$0 \leq t_1 < t_2 \leq \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(1) \geq 0 \\ P \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 < 0 \\ S > 0 \end{cases} \qquad (f(t) = 2t^2 - 3t - 1 + m)$$

$$S > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{3}{2} > 0 \text{ luôn đúng}$$

$P \geq 0 \Leftrightarrow m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$

$\frac{S}{2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < 0$: luôn đúng.

$af(1) \geq 0 \Leftrightarrow m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 9 - 8(m - 1) > 0 \Leftrightarrow 8m < 17 \Leftrightarrow m < \frac{17}{8}$

Vậy: $2 \leq m \leq \frac{17}{8}$.

- *Nhận xét:* Ta có thể viết (1) ra dạng: $m = -2t^2 + 3t + 1$ $(0 \leq t \leq 1)$, rồi dùng đồ thị của $y = -2t^2 + 3t + 1$ để giải bài toán.

Đề 33

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = m + \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

1. Giải hệ phương trình với m = 0.

2. Với những giá trị nào của m thì hệ có nghiệm ?

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM, KHỐI D, 1998)

Giải

1. Với m = 0 thì hệ trở thành: $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} & (1) \\ x + y = \frac{\pi}{4} & (2) \end{cases}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2y) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \cos 2y = 1 \Leftrightarrow -2\sin(x + y).\sin(x - y) = 1$

$\Leftrightarrow -2\sin\frac{\pi}{4}.\sin(x - y) = 1$ (do (2))

$\Leftrightarrow -2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sin(x - y) = 1 \Leftrightarrow \sin(x - y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x - y = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ hay $x - y = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$

- Với: $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ x - y = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ y - \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$

- Với: $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ x - y = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{2} - k\pi \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$

2. Xét hệ: $\begin{cases} \sin^2x + \cos^2y = m + \dfrac{1}{2} & \text{(i)} \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} & \text{(ii)} \end{cases}$

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos2y) = m + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos2y - \cos2x) = m - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\sin(y - x).\sin(y + x) = m - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - y).\sin\frac{\pi}{4} = m - \frac{1}{2} \quad \text{(do (ii))}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x - y) = m - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x - y) = \sqrt{2}\left(m - \frac{1}{2}\right) \quad (*)$$

Ta có: Hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm, do đó:

$$-1 \le \sqrt{2}\left(m - \frac{1}{2}\right) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \le m - \frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \le m \le \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

Vậy hệ có nghiệm khi: $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2} \le m \le \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Đề 34

Xác định a để hai phương trình sau tương đương

$$\mathbf{2\cos x.\cos2x = 1 + \cos2x + \cos3x} \quad (1)$$

$$\mathbf{4\cos^2x - \cos3x = a\cos x + (4 - a)(1 + \cos2x)} \quad (2)$$

(ĐẠI HỌC Y DƯỢC TP.HCM 1998)

Giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \cos3x + \cos x = 2\cos^2x + \cos3x$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2x - \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0,\ \cos x = \frac{1}{2}$$

Ta lại có: $(2) \Leftrightarrow 4\cos^2x - (4\cos^3x - 3\cos x) = a\cos x + 2(4 - a)\cos^2x$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3x + (4 - 2a)\cos^2x + (a - 3)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } 4\cos^2x + (4 - 2a)\cos x + a - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = \frac{a - 3}{2}$$

Do đó (1) và (2) tương đương khi: $\dfrac{a - 3}{2} = 0$ hay $\dfrac{a - 3}{2} = \dfrac{1}{2}$ hay $\left|\dfrac{a - 3}{2}\right| > 1$

$$\Leftrightarrow a = 3 \text{ hay } a = 4 \text{ hay } (a < 1 \vee a > 5).$$

Đề 35

1. Giải phương trình: $\dfrac{\cos\dfrac{4x}{3} - \cos^2x}{\sqrt{1 - tg^2x}} = 0$

2. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh và A, B, C là các góc của tam giác ABC; S là diện tích tam giác. Chứng minh:

$$\text{cotgA} + \text{cotgB} + \text{cotgC} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

(ĐẠI HỌC DƯỢC HÀ NỘI 1998)

Giải

1. Điều kiện: $1 - tg^2x > 0 \Leftrightarrow -1 < tgx < 1 \Leftrightarrow k\pi - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$

Phương trình được viết thành: $\cos\frac{4}{3}x - \cos^2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}(1 + \cos2x) = 0 \Leftrightarrow \cos2t - \frac{1}{2}(1 + \cos3t) = 0$ (đặt $t = \frac{2x}{3}$)

$\Leftrightarrow 2\cos2t - 1 - \cos3t = 0 \qquad \Leftrightarrow 2(2\cos^2t - 1) - 1 - (4\cos^3t - 3\cos t) = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3t - 4\cos^2t - 3\cos t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos t - 1)(4\cos^2t - 3) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 1 \vee \cos t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Với $\cos t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{2x}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = 3k\pi$

Do điều kiện nên ta nhận $x = 3k\pi$

Với $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2x}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + 3k\pi$ (bị loại bởi điều kiện)

Với $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{2x}{3} = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{4} + 3k\pi$ (bị loại bởi điều kiện)

Kết luận: $x = 3k\pi$ là nghiệm.

2. Trong tam giác ABC, ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$a = 2R\sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$

Suy ra $\text{cotgA} = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$

Tương tự, ta có: $\text{cotgB} = \frac{R(a^2 + c^2 - b^2)}{abc}$; $\text{cotgC} = \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$

Suy ra: $\text{cotgA} + \text{cotgB} + \text{cotgC} = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{abc}{R}}$

Do đó: $\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$ (vì $S = \dfrac{abc}{4R}$).

Đề 36

1. Giải phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = \cos 4x$.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$, với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

(HỌC VIỆN NGÂN HÀNG, KHỐI D, 1998)

Giải

1. Ta có: $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2)^3$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x)$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - 3\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{5 + 3\cos 4x}{8}$$

Phương trình được viết thành:

$$\frac{5 + 3\cos 4x}{8} = \cos 4x \quad \Leftrightarrow \quad \cos 4x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2}$$

Vậy: $x = k\dfrac{\pi}{2}$ là nghiệm của phương trình.

2. Ta có: $y = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos x + \sin x}{\sin x\cos x}$

Đặt: $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

thì có: $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\cos x = \dfrac{1}{2}(t^2 - 1)$ nên: $y = \dfrac{2t}{t^2 - 1}$

Với: $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\pi}{4} < x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3\pi}{4}$ nên: $1 < t \le \sqrt{2}$

Bây giờ ta xét hàm số: $y = \dfrac{2t}{t^2 - 1}$ với: $1 < t \le \sqrt{2}$

Đạo hàm: $y' = \dfrac{-2t^2 - 2}{(t^2 - 1)^2} < 0$

t	1	$\sqrt{2}$
y'	$-$	
y	$\searrow$	min

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $y_{\min} = y(t = \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Đề 37

1. Giải phương trình: $\cos 2x - 7\sin x + 8 = 0$.

2. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu $S = p(p - c)$, trong đó S là diện tích tam giác; a, b, c là độ dài các cạnh tam giác và p là nửa chu vi của tam giác.

(ĐẠI HỌC MỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP 1998)

Giải

1. Ta có: $\cos 2x - 7\sin x + 8 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 7\sin x + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 7\sin x - 9 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \text{ (còn } \sin x = -\frac{9}{2} \text{ bị loại)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

2. Ta có: $S = p(p - c) \Leftrightarrow \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = p(p - c)$

$$\Leftrightarrow p(p - a)(p - b)(p - c) = p^2(p - c)^2 \Leftrightarrow (p - a)(p - b) = p(p - c)$$

$$\Leftrightarrow (b + c - a)(a + c - b) = (a + b + c)(a + b - c)$$

$$\Leftrightarrow c^2 - (b - a)^2 = (a + b)^2 - c^2 \Leftrightarrow 2c^2 = (a + b)^2 + (b - a)^2$$

$$\Leftrightarrow 2c^2 = 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

Vậy tam giác vuông tại C.

Đề 38

1. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\text{tg}x + \text{cotg}2x} = \dfrac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\text{cotg}x - 1}$.

2. Cho tam giác ABC thỏa điều kiện: $\text{tg}\dfrac{A}{2} + \text{tg}\dfrac{B}{2} = 1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{3}{4} \le \text{tg}\dfrac{C}{2} < 1$.

(ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI 1998)

Giải

1. Điều kiện:
$$\begin{cases} \text{tg}x + \text{cotg}2x \ne 0 \\ \text{cotg}x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \sin 2x \ne 0 \\ \text{cotg}2x \ne \text{tg}(-x) \\ \text{cotg}x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne k\dfrac{\pi}{2} \\ x \ne \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Ta có:
$$\frac{1}{\text{tg}x + \text{cotg}2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\dfrac{\cos x}{\sin x} - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\text{tg}x + \text{cotg}2x} = \sqrt{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow 1 = \sqrt{2}(\text{tg}x + \text{cotg}2x)\sin x \Leftrightarrow 1 = \sqrt{2}\frac{\cos x}{\cos x.\sin 2x}.\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Do điều kiện nên chỉ nhận nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

2. Ta có: $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$ nên: $\text{tg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \text{cotg}\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}}{1 - \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}} = \frac{1}{\text{tg}\frac{C}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}} = \frac{1}{\text{tg}\frac{C}{2}} \text{ (do giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}\frac{C}{2} = 1 - \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}$$

Hơn nữa $\text{tg}\frac{A}{2} > 0$, $\text{tg}\frac{B}{2} > 0$ nên ta có: $\text{tg}\frac{C}{2} < 1$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} \geq 2\sqrt{\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}}$

$$\Rightarrow \quad 1 \geq 2\sqrt{\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}} \quad \left(\text{vì } \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} = 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 1 - \text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{tg}\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy: $\frac{3}{4} \leq \text{tg}\frac{C}{2} < 1$.

Đề 39

1. Giải phương trình: $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$.

2. Chứng minh rằng ABC là tam giác tù khi và chỉ khi:

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1$.

(ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN HÀ NỘI 1998)

Giải

1. Ta có: $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{2\sin x}.\frac{\sin 4x}{2\sin 2x}.\frac{\sin 8x}{2\sin 4x}.\frac{\sin 16x}{2\sin 8x} = \frac{1}{16}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 16x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 16x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{8}$$

Vậy: $x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{8}$ là nghiệm.

2. Ta có: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C > 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos C.\cos(A - B) + \cos^2 C > 0 \quad (\text{vì } \cos(A + B) = -\cos C)$$

$\Leftrightarrow$ $\cos C[\cos C - \cos(A - B)] > 0$ $\Leftrightarrow$ $-\cos C(\cos(A + B) + \cos(A - B) > 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos C.\cos A.\cos B < 0$ $\Leftrightarrow$ Có đúng một góc có cos < 0 (vì trong tam giác không thể có 2 góc có cos < 0) $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác tù.

Đề 40

1. Giải phương trình: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$.

2. Cho tam giác ABC thỏa điều kiện: $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \text{cotg}\dfrac{A}{2}.\text{cotg}\dfrac{C}{2}$

Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

(HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ 1998)

Giải

1. Phương trình được viết thành :

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) = \frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow$ $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = -1$

$\Leftrightarrow$ $2\cos 3x \cos x + 2\cos 7x.\cos x = -1$ $\Leftrightarrow$ $2\cos x(\cos 7x + \cos 3x) = -1$

$\Leftrightarrow$ $2\cos x.2\cos 5x.\cos 2x = -1$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\sin 2x}{\sin x}.\cos 5x.\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x} = -1$

$\Leftrightarrow$ $\sin 4x \cos 5x = -\sin x$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{2}[\sin 9x + \sin(-x)] = -\sin x$

$\Leftrightarrow$ $\sin 9x = -\sin x$ $\Leftrightarrow$ $\sin 9x + \sin x = 0$ $\Leftrightarrow$ $2\sin 5x.\cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin 5x = 0$ hay $\cos 4x = 0$ $\Leftrightarrow$ $5x = k\pi$ hay $4x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow$ $x = k\dfrac{\pi}{5}$ hay $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}$.

2. Ta có : $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\left(\dfrac{A + B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A - B}{2}\right) + 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$= 2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A - B}{2} + 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ (vì $\sin\dfrac{A + B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$)

$= 2\cos\dfrac{C}{2}\left[\cos\dfrac{A - B}{2} + \cos\dfrac{A + B}{2}\right]$ $\left(\text{vì } \sin\dfrac{C}{2} = \cos\dfrac{A + B}{2}\right)$

$= 2\cos\dfrac{C}{2}.2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2} = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$\sin A + \sin B - \sin C = 2\sin\left(\dfrac{A + B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A - B}{2}\right) - 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$= 2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A - B}{2} - 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2} = 2\cos\dfrac{C}{2}\left[\cos\dfrac{A - B}{2} - \cos\dfrac{A + B}{2}\right]$

$= 2\cos\dfrac{C}{2}(-2)\sin\dfrac{A}{2}\sin\left(-\dfrac{B}{2}\right) = 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

Do đó: $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \text{cotg}\dfrac{A}{2}\text{cotg}\dfrac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{4\cos\frac{S}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{C}{2} \Leftrightarrow \text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}\frac{B}{2} = \text{cotg}\frac{C}{2} \ (\text{vì cotg}\ \frac{B}{2} \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad B = C$$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân tại A.

Đề 41

1. Giải phương trình: cosx.cos4x + cos2x.cos3x = 0

2. Hãy tính các góc của tam giác ABC nếu ta có:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 \leq a^2 \\ \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

trong đó A, B, C là các góc và a, b, c là độ dài các cạnh.

(ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG CƠ SỞ II, KHỐI D, 1998)

Giải

1. Phương trình được viết thành: $\cos x.\cos 4x + \cos 2x\,(4\cos^3 x - 3\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x\,[\cos 4x + 4\cos 2x.\cos^2 x - 3\cos 2x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left[2\cos^2 2x - 1 + 4\cos 2x.\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) - 3\cos 2x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\,(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \vee \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}\right) + k\pi.$$

2. Ta có: $b^2 + c^2 \leq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 \leq b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\Leftrightarrow \cos A \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \geq 90^{\circ}$$

Ta lại có: $\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin A + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin A + 2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} = 1 + \sqrt{2} \qquad (*)$$

Mà $\sin A \leq 1$, $\cos\dfrac{A}{2} \leq 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\text{do } \dfrac{A}{2} \geq 45^{\circ}\right)$

Nên $\sin A + 2\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B-C}{2} \leq 1 + 2\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ $\left(\text{do } \cos\dfrac{B-C}{2} > 0\right)$

Do đó: (*) $\Rightarrow \begin{cases} \sin A = 1 \\ \cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\dfrac{B-C}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 90^\circ \\ B = C = 45^\circ \end{cases}$ Vậy $A = 90^\circ$, $B = C = 45^\circ$.

Đề 42

Giải phương trình: $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4(\sin x - \cos x)$.

(HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG 1998)

Giải

Phương trình được viết thành:

$$2\sin 2x\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = 1 + 4(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cos 2x(\sin 2x - \cos 2x) = 4(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow\quad (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin 2x - \cos 2x) = 2(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow\quad (\cos x - \sin x)[(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2] = 0$$

i) $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

ii) $(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).(-\sqrt{2})\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -2$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos 3x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos 3x - \sin x = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \cos 3x = 1 & (1) \\ \sin x = -1 & (2) \end{cases}$$

Với (2) $\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$. Thế x vào (1) thì có: $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2} + k6\pi\right) = 1$ là sai vì $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$. Kết luận: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Đề 43

1. Giải phương trình: $\text{tg}x + \text{cotg}x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin\frac{2x}{1 + x^2} + \cos\frac{4x}{1 + x^2} + 1.$$

(ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI 1998)

Giải

1. Điều kiện: $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

Đặt t = tgx thì phương trình được viết thành:

$$t + \frac{1}{t} = 2\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right). \quad \Leftrightarrow \quad (t^2+1)^2 = 2t\,(2t + 1 - t^2).$$

$$\Leftrightarrow \quad t^4 + 2t^2 + 1 = 4t^2 + 2t - 2t^3 \quad \Leftrightarrow \quad t^4 + 2t^3 - 2t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t^2 - 1)\,(t^2 + 2t - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm 1,\ t = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \text{arctg}\,(-1 \pm \sqrt{2}\,) + k\pi$$

2. Đặt: $t = \dfrac{2x}{1+x^2}$ (thì: $-1 \le t \le 1$ vì: $1 + x^2 \ge 2\,|x|$)

Ta có: $y = \sin t + \cos 2t + 1 = \sin t + 2\cos^2 t = \sin t + 2(1 - \sin^2 t)$

$\Leftrightarrow \quad y = -2\sin^2 t + \sin t + 2$

$\Leftrightarrow \quad y = -2X^2 + X + 2$ (với $X = \sin t$, $-\sin 1 \le X \le \sin 1$)

Đạo hàm: $y' = -4X + 1$

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{1}{4} \ (\text{với } -\sin 1 < \frac{1}{4} < \sin 1)$$

X	$-\sin 1$		$\frac{1}{4}$		$\sin 1$
y'		+	0	−	
y		↗	$\frac{17}{8}$	↘	

$X = \dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{17}{8}$

$X = \sin 1 \quad \Rightarrow \quad y = 2\sin^2 1 + \sin 1 + 2$

$X = -\sin 1 \quad \Rightarrow \quad y = -2\sin^2 1 - \sin 1 + 2$

Vậy: $y_{\min} = -2\sin^2 1 - \sin 1 + 2$, $\quad y_{\text{Max}} = \dfrac{17}{8}$.

Đề 44

1. Giải phương trình: $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$.

2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 3\sin^2 x - 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x - 2.$$

(ĐẠI HỌC HÀNG HẢI 1998)

Giải

1. Phương trình được viết thành: $2\sin x\cos x = \sqrt{2}\cos x + 2\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x(2\cos x - 2\sin x + \sqrt{2}\,) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \text{ hay } \cos x - \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \ \text{ hay } \ \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad$ hay $\quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad$ hay $\quad x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad$ hay $\quad x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \vee x = -\frac{11\pi}{12} + k2\pi$

2. Ta có: $y = 3\sin^2x - 4\sin x\cos x - 5\cos^2x - 2$

$$= \frac{3}{2}(1 - \cos 2x) - 2\sin 2x - \frac{5}{2}(1 + \cos 2x) - 2 = -2\sin 2x - 4\cos 2x - 3$$

Theo bất đẳng thức Svac -xơ, ta có:

$$|-2\sin 2x - 4\cos 2x| \le \sqrt{(4 + 16)(\sin^2 2x + \cos^2 2x)} = 2\sqrt{5}$$

$\Leftrightarrow \quad -2\sqrt{5} \le -2\sin 2x - 4\cos 2x \le 2\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad -3 - 2\sqrt{5} \le y \le -3 + 2\sqrt{5}$

Vậy: $\quad y_{\min} = -3 - 2\sqrt{5}$, $y_{\mathrm{Max}} = -3 + 2\sqrt{5}$.

ĐỀ THI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1 : Cho $\cos x = \frac{1}{4}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ thì :

a) $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ **b)** $\sin x = \frac{3}{4}$ **c)** $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ **d)** $\sin x = -\frac{3}{4}$.

Câu 2 : Cho tgx = 4. Tính $M = \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin x + 2\cos x}$

a) $M = \frac{2}{3}$ **b)** $M = \frac{1}{3}$ **c)** $M = \frac{3}{2}$ **d)** $M = \frac{4}{3}$.

Câu 3 : Cho tam giác ABC thì có :

a) tgA + tgB + tgC = tgA tgB tgC **b)** tgA tgB + tgB tgC + tgC tgA = 1

c) tgA tgB – tgB tgC + tgC tgA = –1 **d)** tgA + tgB + tgC + tgAtgBtgC = 0.

Câu 4 : Cho tam giác ABC thì có :

a) sin2A + sin2B + sin2C = 4cosA cosB cosC

b) sin2A + sin2B + sin2C = 2sinA sinB sinC

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

d) sin2A + sin2B + sin2C = 4 sinA sinB sinC.

Câu 5 : Cho ΔABC với (A, B, C) là cấp số cộng thì :

a) $B = \frac{\pi}{6}$ **b)** $B = \frac{\pi}{3}$ **b)** $B = \frac{\pi}{4}$ **d)** $B = \frac{\pi}{2}$.

Câu 6 : Tập hợp các nghiệm của $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$ là :

a) $x = k\pi$ **b)** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$)

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ **d)** $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 7 : Cho phương trình (sinx + cosx)sin2x = m thì phương trình vô nghiệm khi :

a) $|m| > 1$ **b)** $|m| < 1$ **c)** $|m| = 2$ **d)** $|m| > \sqrt{2}$.

Câu 8 : Phương trình nào trong các phương trình sau là vô nghiệm.

a) sinx + cosx = 1 **b)** $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$

c) sin2x + sin3x + sin4x = 3 **d)** $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

Câu 9 : Cặp phương trình nào sau đây là tương đương :

a) sinx – cosx = 0 và tgx = 1 **b)** sinx = 0 và cosx = 1

c) cosx = 0 và sinx = –1 **d)** sinx + cosx = 0 và tg2x = –1.

Câu 10 : Cho ΔABC thì ta có :

a) $\sin(5A + 5B) = -\sin 5C$ và $\cos(5A + 5B) = \cos 5C$

b) $\sin(5A + 5B) = \sin 5C$ và $\cos(5A + 5B) = -\cos 5C$

c) $\sin(5A + 5B) = \sin 5C$ và $\cos(5A + 5B) = \cos 5C$

d) $\sin(5A + 5B) = -\sin 5C$ và $\cos(5A + 5B) = -\cos 5C$.

Câu 11 : Cho $f(x) = \sin^2 x + 2\cos^2 x + \sin 2x$ thì giá trị lớn nhất của $f(x)$ là :

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$ **c)** $\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$ **d)** $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 12 : Cho ΔABC (với $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$) thỏa $a^4 = b^4 + c^4$ thì điều đúng nhất trong các phát biểu sau đây là :

a) Góc A nhọn **b)** Góc B nhọn

c) Góc C nhọn **d)** Cả 3 góc A, B, C đều nhọn.

Câu 13 : Cho phương trình $m\cos x - \sin x = 1$ thì điều kiện để phương trình có nghiệm là :

a) $m \geq 0$ **b)** $m \geq 1$ **c)** $m \in R$ **d)** $|m| \geq 1$.

Câu 14 : Hệ phương trình $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{tg}x + \text{tg}y = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ có nghiệm là :

a) $\left(x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ y = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right)$ (với $k \in Z$)

b) $\left(x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ y = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\right)$

c) $\left(x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ y = \dfrac{\pi}{6} - k2\pi\right)$ hay $\left(x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ y = \dfrac{\pi}{3} - k2\pi\right)$

d) $\left(x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ y = \dfrac{\pi}{6} - k\pi\right)$ hay $\left(x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ y = \dfrac{\pi}{3} - k\pi\right)$.

Câu 15 : Hệ phương trình $\begin{cases} x - \sin y = y - \sin x \\ x + 2y = \pi \end{cases}$ có nghiệm là :

a) $x = y = \dfrac{\pi}{3}$ **b)** $x = \dfrac{\pi}{2},\ y = \dfrac{\pi}{4}$

c) $x = -\dfrac{\pi}{3},\ y = \dfrac{2\pi}{3}$ **d)** $x = \pi,\ y = 0$.

Câu 16 : Tam giác ABC thỏa $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1$ thì kết quả đúng nhất là :

a) Tam giác có 3 góc đều nhọn **b)** Cả 3 góc đều lớn hơn 60°

c) Có góc vuông **d)** Tam giác có góc tù.

Câu 17 : Tập hợp nghiệm của phương trình $1 + \sin 2x = |\cos x - \sin x|$ là :

a) $x = k2\pi \quad (k \in Z)$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in Z)$

c) $x = k\frac{\pi}{2} \quad (k \in Z)$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$.

Câu 18 : Phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$ có tập hợp nghiệm là :

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

b) $x = k\pi$

c) $x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi$

d) $x = k\frac{\pi}{2}$.

Câu 19 : Cho tam giác ABC thỏa $8\cos A \cos B \cos C = 1$ thì :

a) tam giác là vuông

b) tam giác là đều

c) tam giác là vuông cân

d) tam giác là nhọn.

Câu 20 : Cho tam giác ABC thì ta có :

a) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$

b) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\cos A \operatorname{coc} B \cos C$

c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

d) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

Câu 21 : Cho tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và S là diện tích thì ta có :

a) $S = \frac{1}{2}ab$

b) $S = \frac{1}{4}(a^2\sin A + b^2\sin B)$

c) $S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

d) $S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2A + b^2\sin 2B)$.

Câu 22: Cho tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và thỏa $a^4 = b^4 + c^4$ thì:

a) tam giác là vuông

b) tam giác là tù

c) tam giác là cân

d) tam giác là nhọn.

Câu 23: Cho tam giác ABC thỏa $a^2 = b^2 + bc$ (với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) thì ta có:

a) $A = 2B$

b) $B = 2A$

c) $A = 2C$

d) $B = 2C$.

Câu 24: Phương trình $x^2 + \cos x = 0$ có tập hợp nghiệm là:

a) vô số nghiệm

b) vô nghiệm

c) $x = \pi + k\pi$

d) $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 25: Phương trình $(\cos x + \sin x)\sin 2x$ vô nghiệm khi:

a) $|m| < \sqrt{2}$

b) $|m| = \sqrt{2}$

c) $|m| > \sqrt{2}$

d) Các câu trên đều sai.

Câu 26: Hệ phương trình $\begin{cases} \text{cotg}x + y = x + \text{cotg}y \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < x < \pi,\quad 0 < y < \pi \end{cases}$ có tập hợp nghiệm là:

a) $x = \frac{\pi}{2}, y = 0$ **b)** $x = \frac{\pi}{8}, y = \frac{3\pi}{8}$

c) $x = y = \frac{\pi}{4}$ **d)** $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}$.

Câu 27: Tam giác ABC thỏa $\text{tg}A + 2\text{tg}B = \text{tg}A.\text{tg}^2 B$ thì:

a) tam giác là vuông **b)** tam giác là đều

c) tam giác là vuông cân **d)** tam giác là cân.

Câu 28: Phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ có tập hợp nghiệm là:

a) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in Z)$ **b)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$ **d)** $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k\pi$ $(k \in Z)$.

Câu 29: Cho $x + y + z = 3\pi$ thì:

a) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 + 4\cos x \cos y \cos z$

b) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 + 2\cos x \cos y \cos z$

c) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 - 4\cos x \cos y \cos z$

d) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1 - 2\cos x \cos y \cos z$.

Câu 30: Hệ phương trình $\begin{cases} \text{tg}x\text{tg}y = 3 \\ x + y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$ có tập hợp nghiệm là:

a) $x = \frac{\pi}{3}, y = -\frac{\pi}{6}$ **b)** vô nghiệm

c) $x = \frac{\pi}{6}, y = 0$ **d)** $x = 0, y = \frac{\pi}{6}$.

Câu 31: Cho ΔABC thì biểu thức: $M = \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\text{tg}\frac{A}{2}$ có giá trị là:

a) -1 **b)** $\sqrt{3}$ **c)** 1 **d)** $2\sqrt{3}$.

Câu 32: Phương trình $|\sin x| + |\cos x| = 1$ có tập hợp nghiệm là:

a) $x = k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$ **b)** $x = k\pi$ $(k \in Z)$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$ **d)** vô nghiệm.

Câu 33: Phương trình sinx.cosx = 1 có tập hợp nghiệm là:

a) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in Z)$ **b)** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in Z)$

c) $x = k\pi \quad (k \in Z)$ **d)** vô nghiệm.

Câu 34: Chọn câu đúng nhất trong các câu sau:

a) $\sin^2 x + \cos^2 x \le \sin^4 x + \cos^4 x$ **b)** $\sin^4 x + \cos^4 x \le \sin^3 x + \cos^3 x$

c) $\sin^2 x + \cos^3 x \le \sin^5 x + \cos^4 x$ **d)** $\sin^2 x + \cos^4 x \ge \sin^4 x + \cos^6 x$.

Câu 35: Cho $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ và $t = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ thì:

a) $0 \le t \le 1$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le 1$ **c)** $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $-1 \le t \le 1$.

Câu 36: Cho $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$ và t = cosx thì:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $-1 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $-1 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $-1 \le t \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 37: Cho $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$ và t = sinx thì:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le t \le 1$ **b)** $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $-1 \le t \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2} \le t \le 1$.

Câu 38: Cho $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{7\pi}{4}$ $(x \ne \frac{\pi}{2}, x \ne \frac{3\pi}{2})$ và t = tgx thì:

a) $-1 \le t \le 1$ **b)** $t \ge -1$ **c)** $t \le 1$ **d)** $t \in R$.

Câu 39: Cho tam giác ABC, thì có:

a) $\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}$

b) $\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\text{cotg}\frac{A}{2} = 1$

c) $\text{cotg}^2\frac{A}{2} + \text{cotg}^2\frac{B}{2} + \text{cotg}^2\frac{C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}$

d) $\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = 1 + \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}$.

Câu 40: Cho sinx + cosx = 1 thì:

a) sin2x = 1 **b)** sin2x = 0 **c)** sin2x = −1

Đáp án

1c	2b	3a	4d	5b	6c	7d	8c	9a	10b
11d	12d	13c	14d	15a	16d	17c	18d	19b	20a
21a	22d	23a	24b	25c	26c	27d	28a	29d	30b
31c	32a	33d	34d	35b	36c	37a	38d	39a	40b

MỤC LỤC

Chương I

BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

§1. Chứng minh đẳng thức lượng giác 6

§2. Biểu thức lượng giác độc lập với biến số 21

§3. Tổng và tích số lượng giác 25

§4. Hệ thức lượng giác trong tam giác 35

§5. Định dạng tam giác 55

§6. Giải tam giác 73

Chương II

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. Phương trình lượng giác cơ bản 82

§2. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx 90

§3. Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với sinx và cosx 96

§4. Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx 99

§5. Phương trình lượng giác và các phép giải 107

§6. Một số phương trình lượng giác không mẫu mực 128

§7. Phương trình lượng giác có chứa căn thức và giá trị tuyệt đối 144

§8. Phương trình lượng giác có chứa hàm mũ và logarit 155

§9. Phương trình lượng giác tương tương 168

Chương III

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 173

Chương IV

BẤT PHƯƠNG TRÌNH & HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 202

Chương V

BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC 227

Chương VI

- GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC
- GIẢI TAM GIÁC
- HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC NGƯỢC 252

Chương VII

GIẢI MỘT SỐ ĐỀ THI TỪ 1990 ĐẾN 1998 275

ĐỀ THI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN 314

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Chịu trách nhiệm nội dung:

Biên tập: NGUYỄN TRỌNG HẢI

Trình bày bìa: HUY VŨ

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN LƯỢNG GIÁC

Mã số: 1L–28 ĐH2006
Ir2.000 cuốn, khổ 16 × 24 tại xưởng in Chi nhánh Công Ty Phát Triển
Ong Nghệ và Truyền Hình TP.HCM.
S xuất bản: 85-2006/CXB/68-01/ĐHQGHN, ngày 24/01/2006.
Qyết định xuất bản số: 88LK/XB
Irxong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006.